

Siham Mittelstedt, Christian Mittelstedt

# **Globale Stabilität schubweicher anisotroper hochbelasteter Laminat- und Sandwich-Träger unter kombi- nierter Belastung im Brücken- und allgemeinen Ingenieurhochbau**

F 3210

Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um die Kopie des Abschlussberichtes einer vom Bundesinstitut für Bau-, Stadt- und Raumforschung (BBSR) im Bundesamt für Bauwesen und Raumordnung (BBR) im Rahmen der Forschungsinitiative »Zukunft Bau« geförderten Forschungsarbeit. Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2020

ISBN 978-3-7388-0524-6

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69

70504 Stuttgart

Nobelstraße 12

70569 Stuttgart

Telefon 07 11 9 70 - 25 00

Telefax 07 11 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

[www.irb.fraunhofer.de/tauforschung](http://www.irb.fraunhofer.de/tauforschung)

SOGETI Deutschland GmbH

**Globale Stabilität schubweicher anisotroper hochbelasteter  
Laminat- und Sandwich-Träger unter kombinierter Belastung  
im Brücken- und allgemeinen Ingenieurhochbau**



Abschlussbericht zum Projekt im Rahmen der Forschungsinitiative  
*Zukunft Bau*

SWD-10.08.18.7-15.62

November 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Allgemeine Angaben . . . . .	1
1.1.1	Forschungsthema . . . . .	1
1.1.2	Angaben zum Antragsteller . . . . .	1
1.2	Kurzbeschreibung des Forschungsvorhabens . . . . .	2
1.3	Beschreibung der zu lösenden Probleme . . . . .	2
1.4	Begründung des Forschungsvorhabens . . . . .	3
1.5	Stand der Forschung . . . . .	6
1.6	Forschungsansatz . . . . .	12
1.7	Untersuchungsmethodik . . . . .	14
1.8	Erwarteter Nutzen des Vorhabens . . . . .	15
1.9	Möglichkeiten für eine praktische Umsetzung . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Laminattheorien</b>	<b>17</b>
2.1	Einleitung . . . . .	17
2.2	Nomenklatur . . . . .	17
2.3	Klassische Laminattheorie . . . . .	18
2.4	Schubdeformationstheorie 1. Ordnung . . . . .	27
2.5	Schubdeformationstheorie 3. Ordnung . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Vorauslegung eines Hallenrahmens</b>	<b>37</b>
3.1	Struktur und Einwirkungen . . . . .	37
3.2	Vordimensionierung in Stahlbauweise . . . . .	45
3.3	Auslegung in Faserverbundbauweise . . . . .	54
3.4	FEM-Modelle der Rahmenstruktur . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Effektive Steifigkeiten von Faserverbundträgern</b>	<b>65</b>
4.1	Effektive Steifigkeiten von Composite-Balken . . . . .	65
4.1.1	Offener Balkenquerschnitt . . . . .	69
4.1.2	Geschlossener Balkenquerschnitt . . . . .	74
4.1.3	Schwerpunkt des Balkenquerschnitts . . . . .	80

4.1.4	Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix im Schwerpunktkoordinatensystem . . . . .	81
4.2	Effektive Steifigkeiten . . . . .	83
4.2.1	Materialeigenschaften . . . . .	84
4.2.2	Analytische Auswertung . . . . .	86
4.2.3	Numerische Auswertung . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Globale Stabilität von Faserverbundträgern</b>	<b>109</b>
5.1	Globale Stabilitätsprobleme . . . . .	109
5.1.1	Biegeknicke . . . . .	109
5.1.2	Drillknicken und Biegedrillknicken . . . . .	115
5.1.3	Kippen . . . . .	124
5.2	Stabilitätsprobleme infolge der Axialbelastung . . . . .	127
5.2.1	I-Profil . . . . .	128
5.2.2	C-Profil . . . . .	139
5.2.3	T-Profil . . . . .	154
5.3	Stabilitätsprobleme infolge Lateralbelastung . . . . .	163
5.3.1	Analytische Lösungen . . . . .	163
5.3.2	Numerische Lösungen . . . . .	171
<b>6</b>	<b>Lokales Beulen mittels Lévy'scher Lösungen</b>	<b>179</b>
6.1	Lokales Beulen mit Hilfe diskreter Plattenmodelle . . . . .	179
6.2	Ersatzfedersteifigkeiten . . . . .	179
6.2.1	Kastenträger . . . . .	179
6.2.2	I-Träger . . . . .	182
6.2.3	C- und Z-Träger . . . . .	182
6.3	Lévy'sche Lösungen für das lokale Beulen . . . . .	182
6.3.1	Idealisierung . . . . .	182
6.3.2	Lösungen für klassische Laminattheorie . . . . .	183
6.3.3	Lösungen für Schubdeformationstheorie 1. Ordnung . . . . .	186
6.3.4	Lösungen für Schubdeformationstheorie 3. Ordnung . . . . .	188
6.4	Numerische Lösung . . . . .	195
6.5	Auswertung . . . . .	197
6.5.1	Ergebnisse und Auswertung . . . . .	197
<b>7</b>	<b>Lokales Beulen mittels geschlossen-analytischer Methoden</b>	<b>203</b>
7.1	Einführung . . . . .	203
7.1.1	Prinzip der virtuellen Verrückungen . . . . .	203
7.1.2	Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials . . . . .	204
7.1.3	Das Ritz-Verfahren . . . . .	205
7.2	Energetische Lösung für Schubdeformationstheorie 3. Ordnung . . . . .	206

7.3	I-Träger eines Hallenrahmens . . . . .	220
7.4	I-Träger nach Kühn et al. [136] . . . . .	222
7.5	Einfluss der Laminatdicke $h$ . . . . .	223
<b>8</b>	<b>Lokales Beulen mit Hilfe des Ritz-Verfahrens</b>	<b>229</b>
8.1	Einführung . . . . .	229
8.2	Das Ritz-Verfahren nach FSDT . . . . .	229
8.2.1	Strukturelle Situation und Grundgleichungen . . . . .	229
8.2.2	Ansatzfunktionen und Energieformulierungen . . . . .	231
8.2.3	Eigenwertproblem . . . . .	236
8.3	Betrachtete Randbedingungen . . . . .	237
8.3.1	Ansatzfunktionen für Fall 1 . . . . .	238
8.3.2	Ansatzfunktionen für Fall 2 . . . . .	238
8.3.3	Ansatzfunktionen für Fall 3 . . . . .	239
8.3.4	Ansatzfunktionen für Fall 4 . . . . .	239
8.4	Das Ritz-Verfahren nach TSDT . . . . .	239
<b>9</b>	<b>Lokales Beulen mittels semi-analytischer Methoden</b>	<b>247</b>
9.1	Einführung . . . . .	247
9.2	Analysemethode . . . . .	247
9.2.1	Ansatzfunktionen . . . . .	247
9.2.2	Energieformulierung . . . . .	249
9.2.3	Übergangsbedingungen . . . . .	252
9.3	Ergebnisse und Diskussion . . . . .	254
9.3.1	Konvergenzanalyse . . . . .	254
9.3.2	Ergebnisse für doppelt-symmetrische I-Träger . . . . .	256
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung des erreichten Forschungsstandes</b>	<b>261</b>
	<b>Literatur</b>	<b>263</b>
	<b>Eigene Publikationen</b>	<b>271</b>
	<b>Anhang 8.A: Integralresultanten nach FSDT</b>	<b>273</b>
	<b>Anhang 8.B: Integralresultanten nach TSDT</b>	<b>285</b>
	<b>Anhang 9.A: Inneres Potential</b>	<b>303</b>
	<b>Anhang 9.B: Äußeres Potential</b>	<b>309</b>
	<b>Anhang 9.C: Resultanten der Ansatzfunktionen für Flansche und Steg</b>	<b>311</b>

---

<b>Anhang 9.D: Resultanten der Ansatzfunktionen für den Steg</b>	<b>313</b>
<b>Anhang 9.E: Resultanten der Ansatzfunktionen für die Flansche</b>	<b>317</b>
<b>Anhang 9.F: Matrizen des Eigenwertproblems</b>	<b>321</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Allgemeine Angaben

Der Forschungsbericht wurde mit Mitteln der Forschungsinitiative Zukunft Bau des Bundesinstituts für Bau-, Stadt- und Raumforschung gefördert (Aktenzeichen SWD-10.08.18.7-15.62).

Die Verantwortung für den Inhalt des Berichtes liegt beim Autor.

#### 1.1.1 Forschungsthema

Das Forschungsthema lautet:

*Globale Stabilität schubweicher anisotroper hochbelasteter Laminat- und Sandwich-Träger unter kombinierter Belastung im Brücken- und allgemeinen Ingenieurhochbau.*

Kurztitel:

Globale Stabilität von Laminat- und Sandwichträgern

#### 1.1.2 Angaben zum Antragsteller

Antragsteller / Name der Stelle: SOGETI Deutschland GmbH

Namen der Verantwortlichen:

Dipl.-Ing. Siham Mittelstedt (Bearbeitung)

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt, TU Darmstadt  
(vormals SOGETI, Bearbeitung)

Maxime Miget, administrative Leitung

Unter Mitwirkung von:

M.Sc. Nedim Ferchichi (Kapitel 3, 4, 5)

M.Sc. Johannes Herrmann (Kapitel 6)

M.Sc. Tjorven Müllenstedt (Kapitel 7)

Unser Zeichen: F1972

Adresse:

Hein-Sass-Weg 30

21129 Hamburg

Telefon +49(0) 40 49 29 37 20

E-Mail:

siham.mittelstedt@sogeti.com

maxime.miget@sogeti.com

Internet: [www.sogeti-hightech.de](http://www.sogeti-hightech.de)

## 1.2 Kurzbeschreibung des Forschungsvorhabens

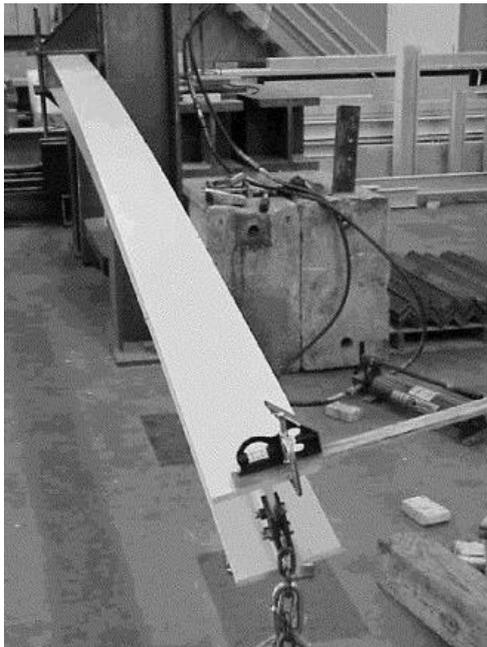


Abb. 1.1: *Kippen eines pultrudierten Faserverbundträgers.*

Das Stabilitätsverhalten klassischer isotroper Trägerstrukturen ist insgesamt verstanden und i.A. sehr gut beherrschbar. Hingegen besteht hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens (sowohl im Sinne der Verzweigungstheorie als auch hinsichtlich des überkritischen Verhaltens) großformatiger schubweicher Träger in Faserverbund- oder Sandwich-Bauweise eine erhebliche Anzahl offener Fragen, deren Klärung das geplante Vorhaben gewidmet ist. Hauptaugenmerk wird auf der Entwicklung innovativer, schneller und hochgenauer Rechenverfahren liegen, mit deren Hilfe in der Ingenieurspraxis eine globale Stabilitätsanalyse (also hinsichtlich Stabilitätsfällen wie Kippen, Biegedrillknicken, Drillknicken, Biegeknicken, aber auch im Hinblick auf die sog. Gesamtstabilität) von großformatigen Laminat- und Sandwich-Trägern erfolgen kann. Alle Analysezugänge sollen die für solche Strukturen typischen Koppeffekte und transversalen Schubverformungen explizit berücksichtigen. Der letzte Punkt macht die Verwendung höherer Laminattheorien erforderlich, die die

Einschränkungen der Klassischen Laminattheorie erweitern.

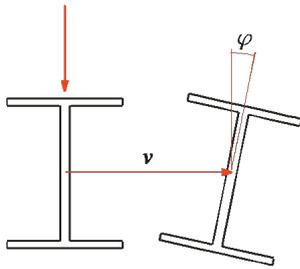
## 1.3 Beschreibung der zu lösenden Probleme

Das Thema der globalen Stabilität schubweicher anisotroper Träger in Laminatbauweise soll vor allem auf geschlossen-analytischem Wege angegangen werden. Die folgenden Ana-

lysepunkte sollen dabei untersucht werden:

- Entwicklung analytischer und semi-analytischer Verfahren für globale Verzweigungsprobleme (Biegedrillknicken, Kippen, Gesamtstabilität) großformatiger anisotroper Faserverbundträger mit doppelsymmetrischen prismatischen Querschnitten, basierend auf einem hierarchischen Modellierungskonzept (Abb. 1.2 und 1.3):

#### Querschnittstreue Verformung



#### Überlagerung globaler und lokaler Moden

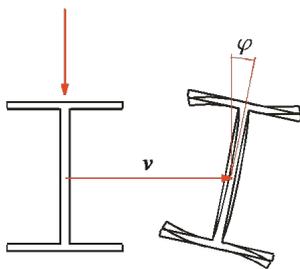


Abb. 1.2: Querschnittstreue Verformung und Beulmoden-Interaktion.

- Ermittlung von globalen Verzweigungslasten, basierend auf der Annahme der Querschnittstreue (Abb. 1.2, oben); Verwendung von effektiven Verbundquerschnitt-Eigenschaften
- Ermittlung von globalen Verzweigungslasten unter Berücksichtigung gleichzeitiger Querschnittsverformungen (Gesamtstabilität, Bild 1.2, unten), basierend auf der klassischen Laminattheorie (Ebenbleiben der Querschnitte, Normalenhypothese, Abb. 1.3, oben)
- Ermittlung von globalen Verzweigungslasten unter Berücksichtigung gleichzeitiger Querschnittsverformungen (Gesamtstabilität), basierend auf Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (Fallenlassen der Normalenhypothese, 1.3, Mitte)
- Ermittlung von globalen Verzweigungslasten unter Berücksichtigung gleichzeitiger Querschnittsverformungen (Gesamtstabilität), basierend auf Schubdeformationstheorie 3. Ordnung (Fallenlassen aller obigen Hypothesen, Abb. 1.3, unten)

- Explizite Berücksichtigung laminatspezifischer Koppeleffekte

- Vergleich der einzelnen Modellierungskonzepte zur Klärung der Notwendigkeit höherer Laminattheorien und der Berücksichtigung der Gesamtstabilität; Klare Empfehlungen für die Praxis (Wann muss man welchen Rechenaufwand treiben?)

- Ermitteln optimaler Träger-Entwürfe

- Numerischer Abgleich und experimentelle Validierung

- Bereitstellen von praxistauglichen Bemessungsformeln und „diagrammen

## 1.4 Begründung des Forschungsvorhabens

Neben den eher klassischen Einsatzgebieten für Faserverbund-Werkstoffe wie z.B. der Luft- und Raumfahrt besteht großes Potential für diese Bauweise im Bauingenieurwesen,

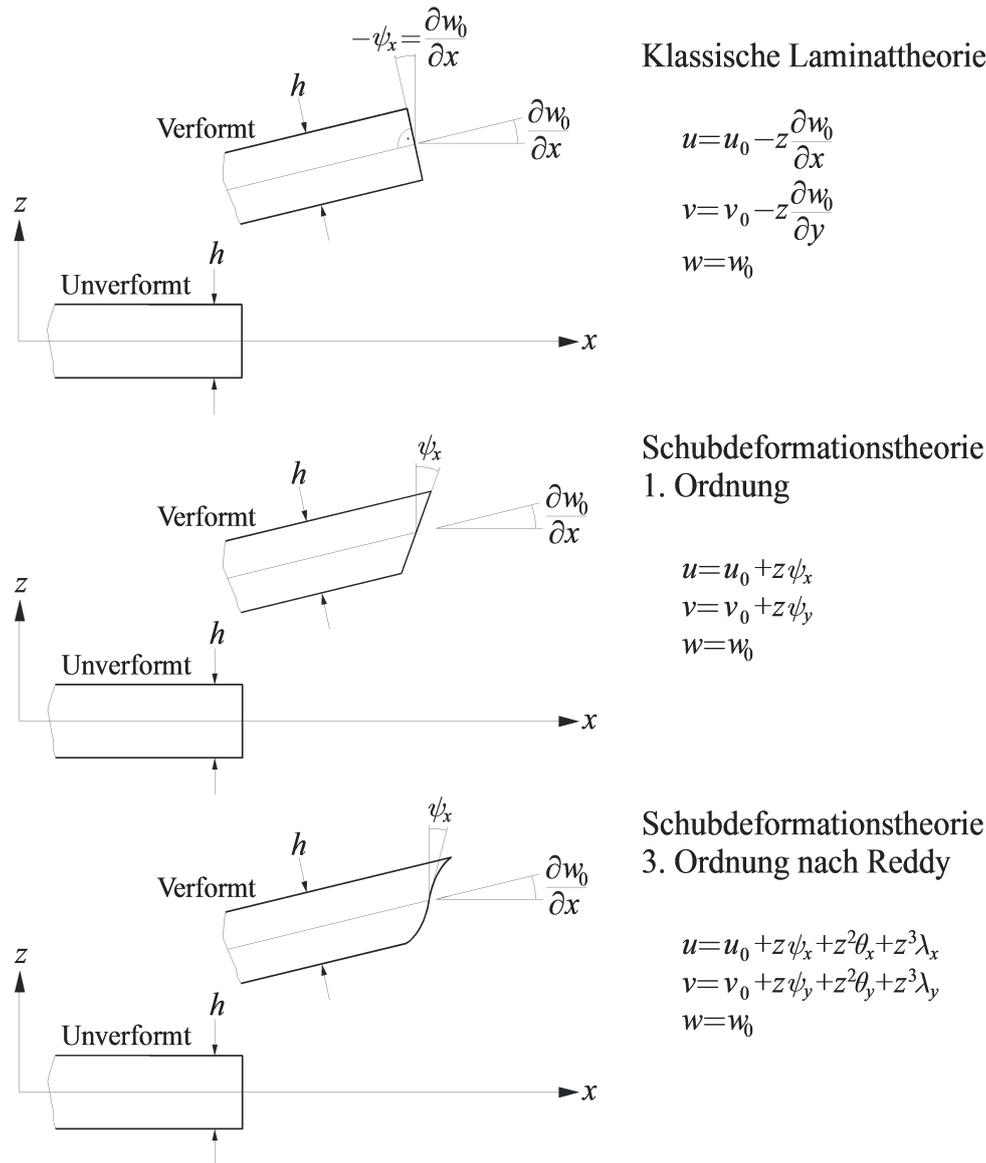


Abb. 1.3: Anzusetzende Laminattheorien.

und zwar hier speziell im Brückenbau, aber auch in anderen Bereichen des konstruktiven Ingenieurbaus wie z.B. im Hallenbau. Hierbei sollen die Forschungen auf die bei dieser Bauweise günstigsten Strukturelemente fokussiert werden, nämlich auf gerade prismatische Biegeträger, wobei neben dem rein statischen Festigkeitsnachweis aufgrund der Schlankheit solcher Bauteile auch die Stabilität eine große Rolle spielt.

Die wesentlichen Vorteile dieser Bauweise gegenüber der klassischen Stahlbauweise sind:

- Eine beachtliche Gewichtseinsparung,
- eine erhebliche bessere Dauerfestigkeit,
- eine deutlich bessere Korrosionsbeständigkeit.

Die verbesserte Schwingfestigkeit in Verbindung mit einer hervorragenden Korrosionsresistenz lässt vermuten, dass man eine deutlich längere Nutzungsdauer sowie einen geringeren

Wartungsaufwand zu erwarten hat, was gerade im Falle von Brückenbauwerken ein wichtiger Punkt ist. Darüber hinaus ist ein Online-Monitoring-System ohne weiteres bereits in der Herstellung der Bauteile zuverlässig integrierbar, was für die Überwachung von Brückentragwerken ein ganz wesentlicher Punkt ist.

Neben den primären Vorteilen gibt es aber auch eine Reihe von Nachteilen zu nennen:

- Bislang ist der beabsichtigte Werkstoff vergleichsweise teuer.
- Die Erfahrungen mit großformatigen und hochbelasteten Trägerstrukturen in Faserverbundbauweise im Bauingenieurwesen sind begrenzt, vor allem hinsichtlich der Dauerstandfestigkeit, aber auch hinsichtlich der Verfügbarkeit erprobter und verlässlicher Berechnungsgrundlagen.
- Der Einsatz im großen Stil würde potentiell neue Herstellungsverfahren gerade für weitgespannte Träger erfordern.

Biegeträger in ihren vielfältigen Ausführungen gehören zu den Basisstrukturen nahezu jeder Konstruktion. Dies allein wäre Anlass genug, sich im Rahmen der Faserverbundtechnik und des Leichtbaus intensiv mit den speziellen Problemen von Faserverbund-Biegeträgern zu befassen. Aber es gibt genügend andere Gründe. Entgegen der vielleicht landläufigen Meinung gibt es eine Vielzahl ungelöster Probleme und es fehlen die Grundlagen für die sichere, nachhaltige sowie gewichts- und kostenoptimale Auslegung von FKV-Biegeträgern. Ein wichtiger Teilaspekt bei der Auslegung dünnwandiger Strukturelemente in FKV-Bauweise und hier speziell von Composite-Biegeträgern ist der Nachweis der Strukturstabilität. Hiermit ist für nahezu alle baupraktischen Anwendungen das Ermitteln einer idellen Verzweigungslast gemeint, die gleichsam als oberste Grenze für die ertragbare Belastung gilt. Bei Betrachtung eines dünnwandigen Biegeträgers sind i.A. die folgenden Stabilitätsfälle zu beachten:

- *Lokale Stabilität*: Beulen von Flanschen und Stegen, ohne Auftreten eines globalen Stabilitätsproblems
- *Globale Stabilität*: Biegeknicken, Drillknicken, Biegedrillknicken, Kippen
- *Gesamtstabilität*: Simultanes Auftreten der ersten beiden genannten Fälle

Das geplante Forschungsvorhaben ist den letzten beiden Typen von Stabilitätsfällen gewidmet, also der globalen Stabilität in Verbindung mit der sog. Gesamtstabilität. Jedoch kann die Gesamtstabilität als eine Überlagerung lokaler und globaler Moden aufgefasst werden, so dass letztlich auch ausführliche Betrachtungen zur lokalen Stabilität in das gegenwärtige Forschungsvorhaben einfließen müssen.

Der momentane Stand der Forschung zeigt überaus deutlich, dass eine zuverlässige und sichere Auslegung großformatiger anisotroper schubweicher Composite- und Sandwich-Träger hinsichtlich der globalen Stabilität mit dem derzeitigen Wissensstand unmöglich ist. Allgemeine diesbezügliche Charakteristika sind weitestgehend unerforscht, wesentliche Berechnungsgrundlagen fehlen vollständig. Insgesamt besteht auf diesem Themengebiet

ein erheblicher Forschungsbedarf, insbesondere wenn das Hauptziel die Entwicklung innovativer neuartiger effizienter praxistauglicher Rechenverfahren ist, die sich in der Ingenieurpraxis leicht umsetzen lassen, um eine werkstoffgerechte Dimensionierung und Gestaltung von Faserverbund-Biegeträgern unter Berücksichtigung von großen Spannweiten, beträchtlichen Traglasten, dauerhafter schwingender Belastung und Lebensdauern von mehreren Jahrzehnten durchzuführen. Ziel des Vorhabens muss es demnach sein, noch fehlende Berechnungsmethoden zu entwickeln, die der in der Praxis tätige Ingenieur nach Art eines Berechnungshandbuchs oder einer normativen Berechnungsanweisung einsetzen kann. Den typischen Laminat-Koppeleffekten wie der Biege-Dehn-Kopplung und der Biege-Drill-Kopplung sowie den bei großformatigen Trägern durchaus erheblich problematischen transversalen Schubverzerrungen muss hier explizit Rechnung getragen werden. Die Möglichkeiten, die Erkenntnisse eines solchen Vorhabens auf die verschiedensten Produkte zu übertragen, sind immens groß. Langfristiges Ziel ist natürlich insbesondere der Brückenbau, dem durch den Einsatz von Faser-Kunststoff-Verbunden völlig neue Perspektiven entstehen. In anderen Ländern ist das Thema Brückenbau mit FKV inzwischen punktuell angegangen worden (s. z.B. Abb. 1.4 und 1.5). Es ist daher volkswirtschaftlich geboten, dass man sich auch in Deutschland diesem Forschungsthema widmet.

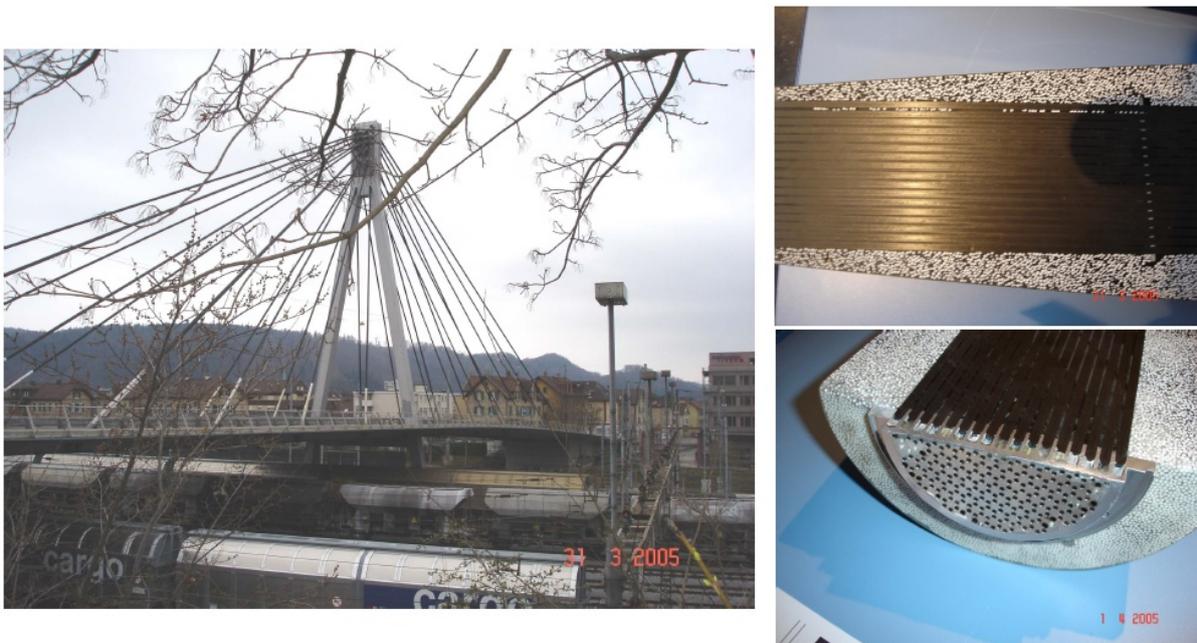


Abb. 1.4: Die Storchenbrücke in Zürich / Schweiz; Kabel aus FKV.

## 1.5 Stand der Forschung

Strukturen in Faserverbundbauweise finden in den verschiedensten Bereichen der angewandten Strukturmechanik Verwendung, beispielsweise in der Luft- und Raumfahrt, aber auch im konstruktiven Ingenieurbau, im Fahrzeugbau, im Behälterbau und in anderen Bereichen des Maschinenbaus. Hierbei haben sich Laminatstrukturen aufgrund ihrer überlegenen spezifischen Festigkeit und Steifigkeit vor allem für Leichtbauanwendungen bewährt. Meist kommen Laminatstrukturen als Mehrschichtenverbunde mit unidirektional verstärkten Einzelschichten vor (s. Abb. 1.6). Die effektiven Eigenschaften von Laminaten lassen sich in



Abb. 1.5: Fußgänger- und Fahrradbrücke aus GFK-Profilen in Kolding, Dänemark, 1997; Länge: 40 m, Tragfähigkeit: 500 kg/m<sup>2</sup>, Fahrzeuge bis 5 Tonnen, Fertigstellung: 18 Stunden in drei Nächten.

weiten Bereichen über den Lagenaufbau an die gegebenen Erfordernisse anpassen. Typische Einzelschichtmaterialien z.B. im Flugzeugbau sind kohlefaserverstärkte Kunststoffe (CFK), im Bauwesen sind auch glasfaserverstärkte Kunststoffe (GFK) verwendet worden.

Anwendungen faserverstärkter Kunststoffe im Bereich des Bauingenieurwesens sind aktuell ebenfalls von großer Wichtigkeit, wie die Publikationen [1-8] zeigen. In [1] wird der Entwurf einer mobilen und KFZ-tauglichen Leichtbau-Brücke mit 20m Spannweite aus pultrudierten faserverstärkten Kunststoffen dokumentiert, während in [2] über Fußgän-

gerbrücken in Faserverbund-Bauweise berichtet wird. Jedoch ist die Konstruktion ganzer Bauwerke mit Primärkomponenten in Laminat-Bauweise bislang eher selten und Bauelemente aus faserverstärkten Kunststoffen werden i.a. meist zu Verstärkungs- und Sanierungszwecken eingesetzt. Hier kann über Erfahrungen in allen klassischen Sparten des Hochbaus, also insbesondere dem Stahl-, Holz- und Massivbau, berichtet werden. In [3,4] wird das Trag- und Verformungsverhalten von Brettschichtholz-Trägern mit Verstärkungen durch Lamellen aus faserverstärkten Kunststoffen dokumentiert.

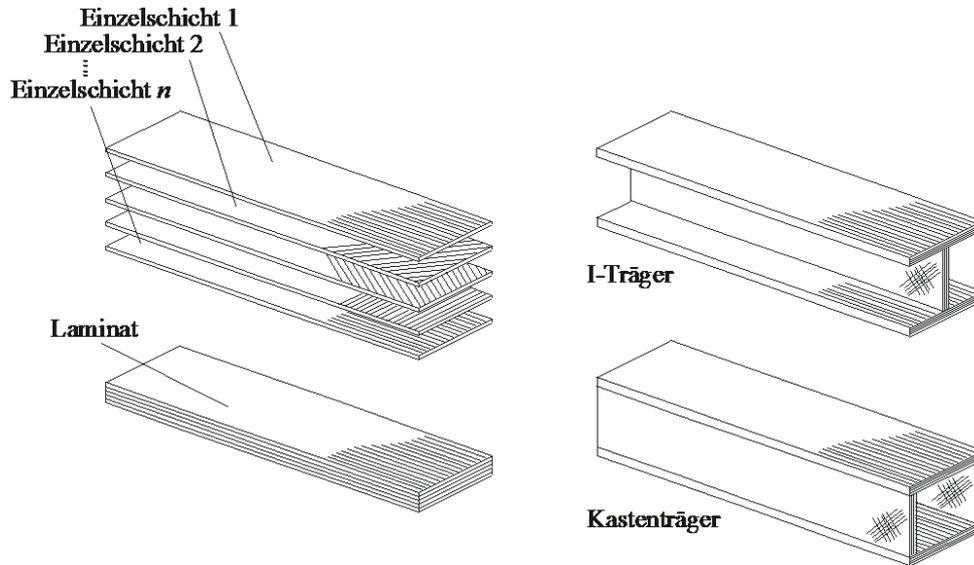


Abb. 1.6: Zusammensetzen eines Laminats aus  $n$  Einzelschichten, bestehend aus faserverstärkten Kunststoffen (links), zusammengesetzte Trägerformen (rechts): Composite-I-Träger (rechts oben) und Composite-Kastenträger (rechts unten).

Ein Überblick über existierende Festigkeitsmodelle für Stahlbetonträger, die mit Faserverbundlamellen im Zugbereich verstärkt wurden, findet sich in [5]. Experimentelle Befunde über exzentrisch beanspruchte und mit Faserverbund-Lamellen umwickelte Stahlbetonstützen wurden in [6] festgehalten. Über ein geschlossen-analytisches Modell zur Berechnung von Spannungen in Stahlträgern, die mit einer Zuglamelle aus Faserverbund-Material verstärkt wurden, wird in [7] berichtet. Über eine Vielzahl moderner Anwendungsgebiete sowohl hinsichtlich der Sanierung und Verstärkung von Bauteilen mit Hilfe von Faserverbund-Materialien als auch der Konstruktion ganzer Bauwerke in Composite-Laminatbauweise mit Schwerpunkt auf Brückentragwerken kann sich mit [8] ein Überblick verschafft werden.

Es sei an dieser Stelle aber angemerkt, dass ein erschöpfender Überblick über verfügbare Arbeiten auf diesem Themengebiet nicht das Ziel dieser Literaturübersicht sein kann. Vielmehr muss an dieser Stelle auf Fachorgane wie z.B. den Zeitschriften *Composite Structures* oder *Thin-Walled Structures* verwiesen werden, die in der Hauptsache Publikationen u.a. zu dem o.g. Themengebiet beinhalten, aber auch mehr dem Bauwesen gewidmete Zeitschriften wie z.B. *Journal of Engineering Mechanics* oder *Journal of Structural Engineering* international, oder national einem Magazin wie *Bauingenieur*.

Unabhängig vom konkreten Anwendungsgebiet werden an praxisrelevante Analyseverfahren, gerade im Bereich der Optimierung und der Vorauslegung, vor allem die Anforderungen gestellt, dass einerseits eine gute Genauigkeit der Ergebnisse erzielt werden soll,

andererseits aber nur wenig Berechnungsaufwand aufgewendet werden darf. Im besten Falle sind Berechnungsmethoden für die tägliche Ingenieursarbeit von rein geschlossen-analytischer Natur und benötigen keinerlei numerischen Aufwand.

Ebenfalls unabhängig vom Anwendungszweck ist der Nachweis des Widerstands von Trägerstrukturen gegen Stabilitätsversagen ein wichtiger Bestandteil einer jeden Nachweisführung solch dünnwandiger Strukturen. Das geplante Vorhaben ist daher der Behandlung des globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger anisotroper schubweicher Laminat- und Sandwichträger auf geschlossen-analytischem und semi-analytischem Wege gewidmet. Bei allen geplanten Arbeiten soll das Hauptaugenmerk auf schnellen analytischen und semi-analytischen Berechnungsmethoden liegen, die vor allem in der alltäglichen Ingenieursarbeit und in Bereichen wie Vorentwurf und Optimierung vorteilhaft Anwendung finden. Im Rahmen letzterer werden die gleichen Berechnungen oft tausend- oder gar millionenfach durchgeführt, so dass solcherlei Anwendungszwecke aufwendige numerische Verfahren von vorneherein ausschließen.

Das Beul- und Nachbeulverhalten ausgesteifter isotroper und anisotroper Platten und Schalen unter verschiedensten Lastfällen ist seit den grundlegenden Arbeiten von z.B. Timoshenko im Jahre 1921 [9] oder Marguerre im Jahre 1937 [10] der Gegenstand einer erstaunlichen Vielzahl von Forschungsarbeiten gewesen und in wesentlichen Punkten verstanden und zumindest mit einigem numerischen Aufwand gut beherrschbar. Einen Überblick über die Entwicklungen bis in die 60er Jahre des letzten Jahrhunderts hinsichtlich der Stabilität isotroper Strukturen verschafft man sich z.B. mit dem Buch von Timoshenko und Gere [11]. Spezielle Nachschlagewerke über das Beul- und Nachbeulverhalten anisotroper Strukturen z.B. aus Composite-Werkstoffen sind die Bücher von Chia [12] sowie von Turvey und Marshall [13]. Ein ausführlicher Überblick über vielerlei Aspekte der Stabilität dünnwandiger Strukturen wird auch von Singer et al. in [14,15] gegeben.

Zur elastizitätstheoretischen Erfassung und analytischen Beschreibung des effektiven mechanischen Verhaltens hat sich für hinreichend dünne Lamine für linear-elastisches Materialverhalten die klassische Laminattheorie (kurz: KLT, siehe [16-18]) vielfältig bewährt. Allerdings existiert eine ganze Reihe von Composite-spezifischen Fragestellungen, für die die Voraussetzungen der KLT (Annahme eines ebenen Spannungszustandes, Kinematik der Kirchhoff-Platte) nicht ausreichen und für die verfeinerte Analysezugänge gefunden werden müssen. Ein Beispiel hierfür ist das mechanische Verhalten von balkenförmigen Composite-Bauteilen mit I- oder Kasten-Querschnitt (s. Abb. 1.6, rechts), die z.B. aus einzelnen Laminaten zusammengesetzt werden können und wo man in der praktischen Anwendung neben ganz klassischen Fragestellungen nach dem Bauteilverhalten im Großen - also beispielsweise Trägerdurchbiegungen oder Eigenfrequenzen - auch Fragen im Zusammenhang mit höheren Problemen - z.B. Schubdeformationen, globales Beulverhalten, lagenweise Spannungsberechnungen, interlaminare Spannungsprobleme lokaler Art z.B. an freien Rändern und Steg-Flansch-Übergängen, lagenweise lokale dreidimensionale Festigkeitsbewertungen etc. - zu beantworten hat. Je nach Art der Problemstellung hat der konstruierende und auslegende Ingenieur dann eine geeignete Modellbildung des Composite-Trägers zu wählen, der dann weitergehende Annahmen als der KLT zugrundeliegen. Eine Literatursichtung ergibt dabei recht schnell, dass es sich hierbei offenbar um ein noch junges und aktives Forschungsgebiet handelt. Ein Übersichtsartikel über verfügbare Modellbildungskonzepte für Composite-Träger ist z.B. mit [19] gegeben. Arbeiten,

die auf verbesserten Balkentheorien beruhen, die aber das Themenfeld der Stabilität nicht beinhalten, sind z.B. mit [20-27] gegeben.

Was moderne Analysezugänge zum Beul- und Nachbeulverhalten isotroper oder anisotroper Platten oder Schalen angeht, so bedient man sich hier neben einfachen analytischen Ansätzen für sehr idealisierte Plattenkonfigurationen (s. z.B. die Arbeiten von Bank und Yin [28], Kollar [29,30], Qiao et al. [31], Qiao und Zou [32], Qiao und Shan [33], Zureick und Shih [34] für einen Überblick über Arbeiten zum lokalen Beulgeschehen in dünnwandigen Composite-Trägern, sämtlich basierend auf der Klassischen Laminattheorie) im wesentlichen recht aufwändiger numerischer Verfahren. Die Ritz-Methode, bereits von Timoshenko [9] mit recht reduzierten Ansätzen für die lineare Beulanalyse isotroper Platten eingesetzt, wurde von Narita und Leissa [35], Becker et al. [36], Wittenberg et al. [37], Kunz [38], Shin et al. [39], Byklum [40], Byklum und Amdahl [41], Buermann et al. [42], Buermann [43] zur linearen und nichtlinearen Stabilitätsanalyse isotroper und anisotroper Tragwerke herangezogen. Die Methode der Finiten Streifen hat in den letzten Jahren ebenfalls einen wichtigen Anteil an der wissenschaftlichen Weiterentwicklung von Analysemethoden für das lineare und nichtlineare Beulverhalten isotroper und anisotroper Platten und Schalen gehabt. Zu nennen sind hier z.B. die Arbeiten von Ovesy und Assaei [44], Ovesy et al. [45,46], Riks [47], Zou und Qiao [48], Loughlan [49], Möcker und Reimerdes [50]. Eine mit der Finite-Streifen-Methode eng verwandte Methodik zur effizienten Behandlung von Beul- und Nachbeulproblemen in dünnwandigen Strukturen ist die sog. Generalisierte Balkentheorie. Neuere Arbeiten auf diesem Gebiet sind z.B. die Publikationen von Adany und Schafer [51,52] und Silva et al. [53]. Weitere numerische Verfahren wie z.B. das Galerkin-Verfahren (Romeo und Frulla [54]) oder die Finite-Differenzen-Methode (Stein [55,56]) wurden ebenfalls eingesetzt. In der überwiegenden Anzahl von Publikationen zu Themenfeldern der Stabilität von dünnwandigen Flächentragwerken und Trägerstrukturen wurde jedoch die Finite-Elemente-Methode eingesetzt, wobei eine Vielzahl an Element-Formulierungen (Volumenelemente, geschichtete Schalenelemente etc.) und Diskretisierungsstrategien zum Einsatz kam. Aufgrund der Fülle der verfügbaren Arbeiten und der Vielzahl der Einsatzmöglichkeiten wird an dieser Stelle nicht weiter ins Detail gegangen, sondern nur eine gewisse Anzahl repräsentativer Arbeiten zitiert wie z.B. die Publikationen von Stevens et al. [57], Kassegne und Reddy [58], Sridharan und Zeggane [59], Guo et al. [60], Viljoen et al. [61], Linde et al. [62], Zimmermann et al. [63], Oh et al. [64], Mallela und Upadhyay [65], Patel et al. [66], oder Noor et al. [67].

Über die geschlossen-analytischen Analysemöglichkeiten der globalen Stabilität dünnwandiger anisotroper Composite-Träger sind ebenfalls einige Arbeiten veröffentlicht worden, wobei dem Antragsteller keine Arbeiten bekannt sind, die die Grenzen der Klassischen Laminattheorie erweitern und auch die laminattypischen Koppeffekte wie Schubkopplung, Biege-Dehn-Kopplung oder Biege-Drill-Kopplung auf geschlossen-analytischem Wege explizit berücksichtigen würden. Vielmehr sind Arbeiten, die diesen Effekten Rechnung tragen, allgemein von numerischer Natur. Nachfolgend wird eine Auswahl repräsentativer Arbeiten zitiert und kurz diskutiert, wobei hier natürlich kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden kann.

Barbero und Tomblin [68] setzten sich mit dem Euler-Knicken sowie mit dem Drillknicken dünnwandiger Composite-Träger auseinander und präsentierten einfache Analysegleichungen sowie experimentelle Befunde. Eine thematisch ähnliche Arbeit wurde von Barbero und Raftoyiannis [69] vorgelegt, in der einfache analytische Formeln für das Biegeknicken

von dünnwandigen Composite-Trägern unter Längsdruck präsentiert und der Übergang zwischen lokalen und globalen Beulmoden bei variabler Trägerlänge untersucht wurden. In einer Folgearbeit [70] wurde daraufhin das simultane lokale und globale Beulverhalten behandelt und eine einfache Analyseformel zur Abschätzung der Verzweigungslasten präsentiert. Barbero und Raftoyiannis [71] schließlich betrachteten das Kippen pultrudierter I-Träger unter Berücksichtigung von Querschnittsverzerrungen unter Einzelmomenten und -kräften und verwendeten geeignete Verschiebungsansätze, um sowohl globale als auch lokale Moden abbilden zu können. Davalos und Qiao [72] untersuchten das Kippen und Drillknicken sowie die Gesamtstabilität von Composite-Trägern mit breiten Flanschen und präsentierten neben experimentellen Befunden auch sehr einfache analytische Modelle, mit deren Hilfe eine Abschätzung der ideellen Verzweigungslasten ermöglicht wurde. Davalos et al. [73] berichteten über analytische und experimentelle Untersuchungen zum Biegedrillknick-Verhalten von pultrudierten I-Trägern, deren Flansche und Stege aus Faserverbund-Materialien bestehen. Die Finite-Elemente-Methode wurde von Gan et al. [74] eingesetzt, um die kritischen Verzweigungslasten pultrudierter I-Träger zu ermitteln. Lee und Kim [75] entwickelten ein analytisches Modell zur Abschätzung des Biege-, Drill- und Biegedrillknickverhaltens von Trägerstrukturen unter Axiallast, die aus Composite-Materialien bestehen. Laminattypische Koppeleffekte gingen hier in die Formulierung mit ein. Basierend auf den dargestellten theoretischen Grundlagen wurde ein eindimensionales finites Element entwickelt, mit dessen Hilfe die kritischen Lasten und Beulmoden abgebildet werden konnten. Kollár [76] verwendete Vlassovs Balkentheorie, um ein analytisches Modell zur Abschätzung des Stabilitätsverhaltens dünnwandiger orthotroper Balken unter Längsdrucklast zu entwickeln. Qiao et al. [77] behandelten das Biegedrillknick-Verhalten von Kragbalken mit I-Profilen, die aus Faserverbund-Laminaten bestehen, mittels geeigneter Verschiebungsansätze für Ausbiegung und Drillwinkel. Darüber hinaus sind in [77] einige experimentelle Befunden enthalten. Shan und Qiao [78] untersuchten das Biegedrillknick-Verhalten offenprofiliger Composite-Träger und verwendeten ein Variationsprinzip sowie separate Verschiebungsfelder für Flansche und Stege. Zusätzlich hierzu sind in [78] einige experimentelle Resultate vorhanden. Der Einfluss der Spannungsverteilungen auf das globale Stabilitätsverhalten von dünnwandigen prismatischen Composite-Trägern wurde von De Lorenzis und La Tegola [79] mit Hilfe der Ritz-Methode analysiert. Fachlich ein wenig abseits der globalen Stabilität, aber dennoch thematisch sehr verwandt, verwendete Sapountzakis [80] die Randelemente-Methode zur Untersuchung des Torsionsschwingverhaltens dünnwandiger Composite-Träger. Das Gesamtstabilitätsverhalten von dünnwandigen Trägern, die durch Steifen lokal verstärkt wurden, untersuchten Teter und Kolakowski [81] mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Kolakowski und Kubiak [82] befassten sich mit der nichtlinearen FEM-Simulation dünnwandiger Composite-Träger und analysierten den Nachbeulbereich und die ultimative Lastkapazität solcher Strukturen. Das Biege-, Drill- und Biegedrillknickverhalten von längsdruckbelasteten Composite-Kasten-Trägern wurde von Vo und Lee [83] mittels eines analytischen Modells, basierend auf der klassischen Laminattheorie, untersucht. Basierend auf dem analytischen Modell wurde ein eindimensionales finites Element hergeleitet, mit dessen Hilfe derartige Stabilitätsanalysen auf numerischem Wege durchgeführt werden konnten. Das gekoppelt Schwingungs- und Biegedrillknickverhalten dünnwandiger Composite-Träger mit beliebigen Lagenaufbauten unter Berücksichtigung von Schubverformungen wurde von Vo und Lee [84] behandelt, wobei hier Ergebnisse auf numerischem

Wege erzeugt wurden. Naderian et al. [85] verwendeten die Finite-Streifen-Methode zur Berechnung des Drillknick- und Biegedrillknickverhaltens von Composite-Trägern unter Druckbelastung. Sapountzakis und Dourakopoulos [86] zogen die Randelemente-Methode zur Untersuchung des Biegedrillknick-Verhaltens dünnwandiger Composite-Träger unter diversen Lastfällen heran. Hierbei wurde auch die Möglichkeit zusammengesetzter Träger betrachtet, deren Bestandteile unterschiedliche Materialeigenschaften aufweisen können.

Mit geeigneten Werkzeugen zur Analyse der Stabilität eines Composite-Trägers stellt sich auch die Frage nach bestmöglichen Laminat-Designs, die mit maximaler Stabilität die Lastabtragung gewährleisten können. Hier ist dann der Einsatz der Methoden der Strukturoptimierung gefragt. Was die Strukturoptimierung innerhalb der Strukturmechanik angeht, so werden derartige Fragestellungen seit mehr als drei Jahrzehnten intensiv behandelt. Während es zunächst vor allem Probleme des Leichtbaus in der Luft- und Raumfahrt waren, erschließt sich die Strukturoptimierung mittlerweile eine immer breitere Anwendung, z.B. im Automobilbau, im Maschinenbau sowie auch im Bauwesen. Dabei zieht die Strukturoptimierung die Methoden der mathematischen Programmierung heran und stellt heute eine breite Palette verschiedener Optimierungstechniken zur Verfügung [87-91]. Strukturoptimierung erfordert eine angemessene Strukturmodellierung, die Bildung eines geeigneten Optimierungsmodells, den zweckmäßigen Einsatz von Optimierungsalgorithmen sowie die Integration dieser Teilaufgaben zu einer effektiven Optimierungsprozedur. Bis auf einige wenige Ausnahmen sind dem Antragsteller beim Composite-Träger-Problem keine optimierenden Untersuchungen bekannt, die über simple vergleichende Parameterstudien hinausgingen und in denen auf iterativ-algorithmischem Wege systematisch nach Optimallösungen für solche Bauteile gesucht würde. Insbesondere herrscht ein Mangel an Optimierungsuntersuchungen, die neben Restriktionen z.B. für Durchbiegungen und / oder Eigenfrequenzen auch das Stabilitätsverhalten berücksichtigen würden. Einige grundlegende Arbeiten zur Composite-Träger-Optimierung sind die Publikationen von Walker [92], Savic et al. [93] und Rajasekaran [94].

Von grundlegender Bedeutung zum Verständnis des Trag-, Verformungs- und Versagensverhaltens von Composite-Träger-Strukturen sind schließlich auch experimentelle Befunde. Hier liegen bereits neben einigen der bereits genannten Arbeiten einige Erfahrungen speziell hinsichtlich der Anwendung im Bauingenieurwesen vor, es können z.B. die Arbeiten von Lee et al. [95], Palmer et al. [96] oder Gilchrist et al. [97-99] genannt werden.

## 1.6 Forschungsansatz

Während sich für viele grundlegende praktische Probleme, in denen Composite-Träger eine Rolle spielen - genannt werden können hier elementare und globale Fragen wie einfache Biegung, Euler-Knickung, oder Eigenschwingungen - geschlossene Lösungen angeben lassen und i.a. die einfachen Analysewerkzeuge wie die klassische Laminattheorie (KLT) für eine Strukturberechnung ausreichen, so stellt sich für konkrete Anwendungen eine ganze Reihe weiterer Fragen, die sich mit dieser klassischen Theorie nicht hinreichend beantworten lassen und deren Klärung damit verfeinerte Berechnungswerkzeuge erfordert. Ein solcher Teilaspekt ist die globale Stabilität weitgespannter hochbeanspruchter anisotroper Laminat- und Sandwichträger unter Berücksichtigung transversaler Schubverformungen sowie der gerade für Laminatetypischen Koppeleffekte (Schubkopplung,

Biege-Dehn-Kopplung, Biege-Drill-Kopplung), wobei mit globaler Stabilität Phänomene wie Kippen, Biegedrillknicken, sowie die auch Gesamtstabilität (also die Überlagerung globaler und lokaler Moden) gemeint ist.

Hier möchte das beabsichtigte Vorhaben ansetzen, neuartige Modellierungskonzepte entwickeln und dem Anwender zur Verfügung stellen. Die Untersuchung des globalen Stabilitätsverhaltens von Composite-Biegeträgern ist sowohl von grundsätzlichem innermechanischen Interesse als auch von technisch-praktischer und bautechnischer Relevanz. Hier möchte das beabsichtigte Vorhaben einen wesentlichen Beitrag leisten, indem mit den Mitteln der Elastizitätstheorie und der mathematischen Programmierung neue und effiziente Analysewerkzeuge zur globalen Stabilitätsanalyse bereitgestellt und damit gezielte Optimierungen im Hinblick auf bestmögliche Trägereigenschaften vorgenommen werden. Die Untersuchungen werden sowohl die Entwicklung effizienter geschlossen-analytischer Näherungsverfahren als auch den Einsatz numerischer Verfahren umfassen und in einer späteren Projektphase auf die iterativ-algorithmische Umsetzung nichtlinearer Optimierungsverfahren zurückgreifen. Letztlich werden sich die wichtigsten Charakteristika des globalen Stabilitätsverhaltens solcher Trägerbauteile herausarbeiten und für den Anwender in der Praxis allgemeingültige Rechen- und Konstruktionsregeln an die Hand geben lassen.

Aufgrund des geschichteten Charakters solcher Composite-Bauteile spielen interlaminare Spannungen - dies sind sowohl Schub- als auch Normalspannungen, die in der Dickenrichtung eines geschichteten Bauteiles wirken - im Hinblick auf den Stabilitätswiderstand eine ganz wesentliche Rolle, was man z.B. vom homogenen Stahlträger her nicht kennt und was damit ganz neue Fragen im Rahmen des konstruktiven Ingenieurbaus aufwirft. Ein wichtiger Aspekt ist, dass insbesondere die transversalen Schubspannungen bei Composite-Materialien nur sehr geringen Materialsteifigkeiten gegenüberstehen und damit Verformungen hervorrufen, die nach der klassischen Laminattheorie nicht erfasst werden. Diese Schubverformungen, die gerade bei weitgespannten und daher recht dicken Bauteilen äußerst relevant werden, haben stets einen ungünstigen Einfluss auf den Beulwiderstand solcher Strukturen und müssen mit Hilfe geeigneter höherer Theorien - zu nennen wären hier die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung sowie die Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy - erfasst werden, was einen zentralen Punkt des geplanten Vorhabens darstellt. Desweiteren spielen die o.g. laminat-typischen Koppeleffekte eine ganz wesentliche Rolle bei der Abschätzung des globalen Beulwiderstands, so dass auch diese eingehend zu untersuchen sein werden.

Nachdem die Analysemöglichkeiten zu den oben erläuterten Problemfeldern untersucht worden sind, soll das Composite-Träger-Problem zum Optimierungsproblem gemacht werden. Nach Maßgabe vorhandener Design-Freiheitsgrade (Laminat-Lagenaufbauten, Querschnittsabmessungen, Wanddicken) sollen systematisch die Methoden der mathematischen Strukturoptimierung zum Auffinden optimaler Bauteillösungen unter Stabilitätsrestriktionen eingesetzt werden. Hierbei kann mit mehreren Zielsetzungen gearbeitet werden. Einerseits kann darauf hingearbeitet werden, beispielsweise Beulwiderstände zu maximieren, andererseits kann simultan dazu eine Maximierung der ertragbaren Last unter Festigkeitsrestriktionen oder eine Minimierung der Durchbiegung unter Gebrauchstauglichkeitsrestriktionen durchgeführt werden. Design-Variablen sollen zunächst nur die Laminat-Lagenorientierungen sein, in einem späteren Schritt könnten die Querschnittsabmessungen und die Träger-Wanddicken ebenfalls freigegeben werden.

Das Vorhaben wird schließlich Fragen der folgenden Art klären: Welche kinematischen Annahmen im Rahmen der Träger-Modellbildung führen mit welchem Aufwand auf welche Ergebnisgenauigkeit für globale Beullasten, und welches Modellierungskonzept ist baupraktisch besonders tauglich? Was ist hierbei der Erkenntnisgewinn gegenüber der KLT als untere Genauigkeitsgrenze bzw. was ist der Effizienzgewinn gegenüber aufwendigen vollständig dreidimensionalen Simulationen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente als obere Genauigkeitsgrenze? Was sind ganz grundlegende Parametereinflüsse auf das globale Stabilitätsverhalten solcher Composite-Träger? Welche Bemessungshilfen lassen sich dem Anwender hiermit an die Hand geben? Welche Interaktionen lassen sich zwischen den verschiedenen Lastfällen feststellen? Welche grundlegenden Aussagen zur Bemessung derartiger Composite-Träger-Strukturen lassen sich hinsichtlich der globalen Stabilität treffen? Im Bezug auf die Optimierung von Composite-Träger-Strukturen ist vor allem zu klären, wie sich kritische Beanspruchungen am leichtesten reduzieren oder verharmlosen lassen und welches Optimierungspotential solchen Trägerstrukturen innewohnt. Auch hier wird erwartet, dass sich für die praktische Umsetzung solcher Bauteile wichtige Aussagen treffen lassen werden. Am Ende des beabsichtigten Vorhabens wird sich sagen lassen, in welcher Trägersituation sich mit welchem Verfahren mit welchem Aufwand welche Ergebnisgüte bezüglich der globalen Stabilität realisieren lässt, und es werden sich entsprechende Empfehlungen für den Anwender geben lassen. Schlussendlich werden sich auch wichtige Aussagen über die Tauglichkeit der einzelnen zu entwickelnden Analysewerkzeuge sowie über ihre Möglichkeiten und Grenzen machen lassen.

Es ist an dieser Stelle wichtig anzumerken, dass sich die hier diskutierten Arbeitspunkte bislang nur auf Probleme der globalen Stabilität von Composite-Trägern beschränken. Ein weiterer Punkt, der von ebenso großer Bedeutung ist, ist die Frage nach der lokalen Stabilität (also hier vor allem das Beulen von Flanschen und Stegen z.B. eines I-Trägers) von Composite-Träger-Strukturen. Selbstverständlich können in dem beabsichtigten Vorhaben Fragen zur lokalen Stabilität nicht in der dem Thema angemessenen Breite behandelt werden. Jedoch erfordert die Behandlung der Gesamtstabilität auch Betrachtungen hinsichtlich des lokalen Stabilitätsverhaltens, so dass im Rahmen dieses Forschungsvorhabens auch entsprechende Untersuchungen angestellt werden müssen.

## 1.7 Untersuchungsmethodik

Aus Gründen der Anwenderfreundlichkeit und der baupraktischen Umsetzbarkeit sollten die zu entwickelnden Rechenverfahren zur globalen Stabilität von Laminat- und Sandwichträgern stets geschlossen-analytischer Natur sein. Während hinsichtlich der Kinematik einfacher geschichteter Platten- und Schalenstrukturen eine Vielzahl von Publikationen verfügbar ist und in den vergangenen Jahrzehnten die verschiedensten Analysekonzepte verwendet wurden, ist der Kenntnisstand hinsichtlich der Modellierung des globalen Stabilitätsverhaltens von schubweichen und anisotropen Trägern aus Composite-Materialien wesentlich geringer, so dass hier ein erheblicher Forschungsbedarf besteht.

In solchen Fällen, bei denen eine rein geschlossen-analytische Modellierung nicht möglich sein wird (das wird insbesondere bei Auftreten der Gesamtstabilität sowie bei Vorliegen der verschiedenen möglichen Koppeffekte Schubkopplung, Biege-Dehn-Kopplung, Biege-Drill-Kopplung der Fall sein) ist vorgesehen, dass mit semi-analytischen Verfahren (z.B.

die Ritz-Methode oder das Galerkin-Verfahren) gearbeitet wird. Hierbei werden geeignete Ansätze für die sich einstellenden Beulmoden in Form von Reihenentwicklungen zielführend sein, und durch Betrachtungen des Energiehaushalts des gebeuln Trägers werden sich einfach anwendbare Lösungen für die entsprechenden kritischen Lasten herleiten lassen.

Alle so hergeleiteten analytischen oder semi-analytischen Verfahren werden durch Vergleich mit begleitenden Finite-Elemente-Analysen verifiziert oder, sofern verfügbar, durch Vergleich mit Testergebnissen aus der Literatur validiert. Eigene Testreihen werden in der Schlussphase des Projektes ebenfalls durchgeführt werden.

Die Ergebnisse werden in zusammengefasster Form auf Fachkonferenzen präsentiert und in nationalen Magazinen (z.B. Bauingenieur) wie auch in internationalen Fachzeitschriften (z.B. Composite Structures oder Thin-Walled Structures) veröffentlicht.

## 1.8 Erwarteter Nutzen des Vorhabens

Der gegenwärtige Stand der Technik zeigt, dass zwar das globale Stabilitätsverhalten dünnwandiger Trägerstrukturen in Metallbauweise sehr gut verstanden und auch baupraktisch im Sinne einer einfachen und praxisnahen Nachweisführung sehr gut beherrschbar ist. Im direkten Vergleich zeigt sich allerdings, dass das globale Beulverhalten anisotroper schubweicher Laminat- und Sandwichträger, insbesondere in Verbindung mit der Gesamtstabilität, bislang nur punktuell angegangen wurde und insbesondere praxisnahe Berechnungsverfahren und Bemessungshilfen überhaupt noch nicht existieren. Somit ist eine sichere und effiziente Auslegung solcher Strukturen in vielerlei Hinsicht, aber eben auch insbesondere hinsichtlich der globalen Stabilität mit dem derzeitigen Kenntnisstand unmöglich.

Der wesentliche Nutzen der Ergebnisse des Vorhabens wird es sein, dem Anwender in der Praxis alle notwendigen Werkzeuge an die Hand zu geben, mit deren Hilfe eine schnelle und praxistaugliche Analyse und Dimensionierung derartiger Laminat- und Sandwichträger durchführbar ist.

## 1.9 Möglichkeiten für eine praktische Umsetzung

Aufgrund des geschlossen-analytischen bzw. semi-analytischen Charakters der zu entwickelnden Rechenmethoden ist zu erwarten, dass sich diese ohne Probleme in einer Art und Weise so zusammenfassen lassen, dass sie dem Anwender in der Praxis ohne große Mühen verständlich gemacht werden können und die Rechenverfahren unkompliziert in der alltäglichen Ingenieursarbeit anwendbar sind. Letztlich ist es auch das Ziel, in einer Abschlusspublikation weitestgehend allgemeingültige Auslegungsregeln zu formulieren, die in der Praxis als Richtlinien genutzt werden können. Insofern wird eine direkte und vollständige Umsetzung der Ergebnisse des geplanten Vorhabens in der praktischen Anwendung gesehen.



# Kapitel 2

## Laminattheorien

### 2.1 Einleitung

Die Untersuchung der Gesamtstabilität von FKV-Trägern erfordert neben der Betrachtung des globalen Geschehens auch eine Betrachtung des lokalen Beulverhaltens solcher Träger. Naturgemäß sind die Ergebnisse einer solchen lokalen Beulanalyse stark davon abhängig, welche Laminattheorie den Berechnungen zugrunde gelegt wurde. Wir betrachten im Weiteren die folgenden Laminattheorien (s. auch Abb. 1.3):

- Klassische Laminattheorie, basierend auf der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte sowie der Normalenhypothese, Abb. 1.3, oben,
- Schubdeformationstheorie 1. Ordnung, basierend auf den Hypothesen wie 1), aber Fallenlassen der Normalenhypothese, Abb. 1.3, Mitte,
- Schubdeformationstheorie 3. Ordnung, Fallenlassen aller obigen Hypothesen, Abb. 1.3, unten.

Die klassische Laminattheorie ist dabei das Äquivalent zur Kirchhoffschen Plattentheorie bei isotropen Platten, wohingegen die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung die Verallgemeinerung der Reissner-Mindlinschen Plattentheorie auf Lamine darstellt.

Während die klassische Laminattheorie vor allem bei hinreichend dünnen Flächentragwerken zum Einsatz kommt, so bieten sich die beiden höheren Theorien besonders dann an, wenn es sich um Strukturen handelt, bei denen die transversalen Schubverformungen an Einfluss gewinnen und eine Berechnung nach klassischer Laminattheorie nicht mehr ausreichend zuverlässige Ergebnisse liefert. Details zu den einzelnen Laminattheorien können in [13], [16], [17], [18], [100] nachgeschlagen werden. Wir fassen hier die wesentlichen Gesichtspunkte zusammen.

### 2.2 Nomenklatur

Lamine sind Mehrschichtverbunde, in denen eine beliebige Anzahl von Einzelschichten beliebiger Materialien schichtweise angeordnet sind. Die Eigenschaften der Einzelschichten können dabei ebenfalls beliebig sein. Abb. 2.1 zeigt eine Prinzipskizze eines Laminats, das

auch Schichten unidirektional verstärkter Kunststoffe besteht. Die Schicht  $k$  sei durch den Faserwinkel  $\theta_k$  in ihrer Richtung ausgezeichnet.

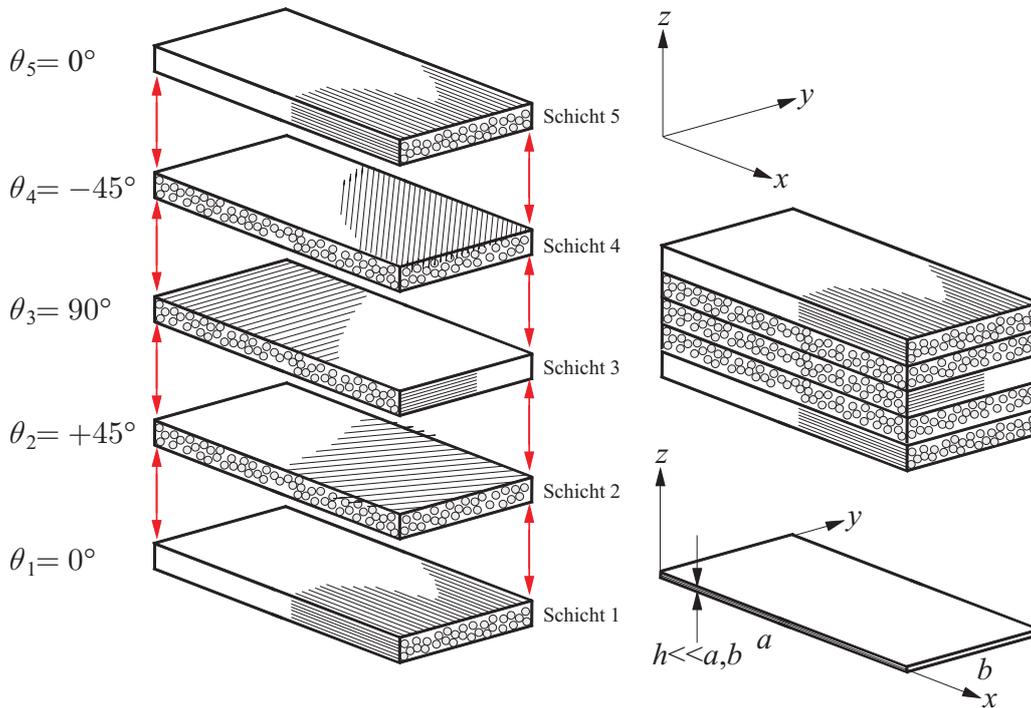


Abb. 2.1: Laminat (aus [100]).

Laminats werden üblicherweise durch den sog. Laminat-Code beschrieben. Die Einzelschichten werden dabei durch ihre Faserrichtung gekennzeichnet, wobei die Faserwinkel in eckigen Klammern zusammengefasst und die Schichten durch die Dicke des Laminats von der untersten Schicht ausgehend in positive  $z$ -Richtung gezählt werden. Das Beispiellaminat der Abb. 2.1 würde demgemäß bezeichnet werden wie folgt:

$$[0^\circ / +45^\circ / 90^\circ / -45^\circ / 0^\circ]. \quad (2.1)$$

Abkürzungen im Laminat-Code sind üblich und werden im weiteren Verlauf dieses Dokuments an den betreffenden Stellen erläutert.

Die weitere Nomenklatur verdeutlicht die Abb. 2.2. Das betrachtete Laminat habe die Dicke  $h$  und sei aus  $N$  beliebigen Schichten zusammengesetzt. Das Laminat wird durch die Laminatmittelebene an jeder Stelle halbiert. Das globale Bezugssystem  $x, y, z$  hat seinen Ursprung in der Laminatmittelebene, die durch die Achsen  $x$  und  $y$  aufgespannt wird. Die Einzelschicht  $k$  wird durch die beiden Dickenkoordinaten  $z_{k-1}$  an der unteren Grenzfläche und  $z_k$  an der oberen Grenzfläche begrenzt.

## 2.3 Klassische Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie stellt eine der einfachsten und in der Praxis am weitesten verbreiteten Laminattheorien dar. Sie ist die direkte Übertragung der klassischen Kirchhoffschen Plattentheorie auf die Analyse ebener Laminats. Sie wird üblicherweise dann herangezogen, wenn das betrachtete Laminat hinreichend dünn ist (also  $h \ll a, b$  gilt)

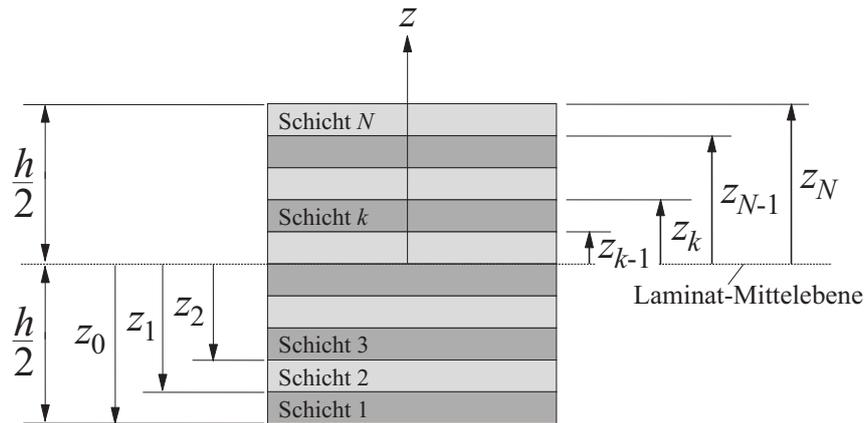


Abb. 2.2: Schnitt durch ein Laminat (aus [100]).

und transversale Schubverformungen keine Rolle in der Analyse spielen. Sie beruht auf den folgenden Annahmen:

- (i) Es wird ein perfektes Laminat mit perfekt miteinander verbundenen Schichten ohne Schädigungen betrachtet.
- (ii) Es wird ein ebener Spannungszustand im gesamten Laminat bezüglich der Dickenrichtung vorausgesetzt.
- (iii) Es werden die kinematischen Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie verwendet, also die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte und die Normalenhypothese.
- (iv) Die Dicke  $h$  des Laminats bleibt während des gesamten Verformungsvorgangs unverändert.

Die Abb. 2.3 zeigt die kinematischen Annahmen (iii) und (iv) im Detail anhand eines aus dem Laminat herausgeschnittenen Elements. Die Verschiebungen eines Punktes der La-

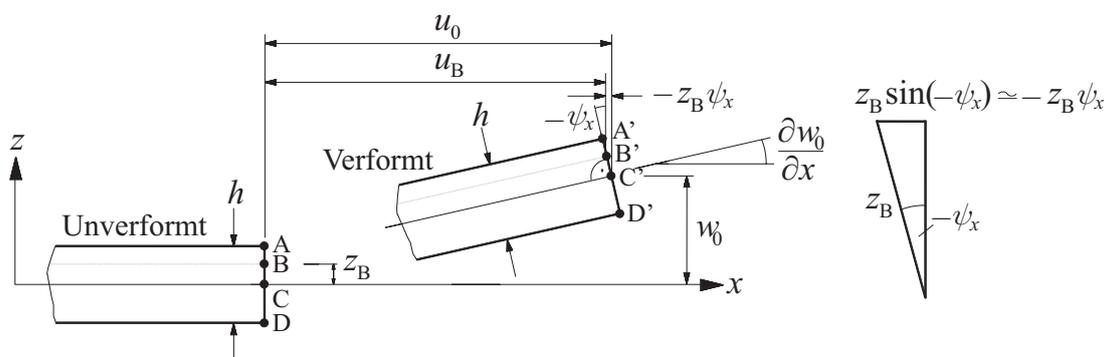


Abb. 2.3: Kinematik nach Klassischer Laminattheorie, aus [100].

minatmittelebene sind hier als  $u_0$  und  $w_0$  gekennzeichnet, und das Laminatenelement weist im verformten Zustand die Neigung  $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  auf. Wir betrachten die folgenden Verschiebungsgrößen:

- $u_0(x, y), v_0(x, y), w_0(x, y)$  sind die Verschiebungen eines Punktes der Laminatmittelebene.
- $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  sind die Verschiebungen eines beliebigen Punktes im Laminat außerhalb der Laminatmittelebene.

Darüber hinaus ergeben sich zwei Biegewinkel  $\psi_x = \psi_x(x, y)$  und  $\psi_y = \psi_y(x, y)$ . An der Abb. 2.3 können wir folgendes ablesen:

$$u_B = u_0 - z_B \sin(-\psi_x) = u_0 + z_B \sin \psi_x. \quad (2.2)$$

Wir betrachten im Weiteren kleine Verformungen und damit auch kleine Biegewinkel, so dass:

$$u_B = u_0 + z_B \psi_x. \quad (2.3)$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt außerhalb der Laminatmittelebene, so dass wir schreiben können:

$$u = u_0 + z \psi_x. \quad (2.4)$$

Genauso kann man für die zweite ebene Verschiebung  $v$  schreiben:

$$v = v_0 + z \psi_y. \quad (2.5)$$

Aufgrund der Annahme (iv) gilt, dass  $w_0$  und  $w$  identisch sein müssen:

$$w = w_0. \quad (2.6)$$

Die Normalenhypothese schließlich erfordert, dass:

$$-\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (2.7)$$

sowie:

$$-\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Das Verschiebungsfeld nach der Klassischen Laminattheorie ergibt sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \psi_x(x, y) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \psi_y(x, y) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aus dem Verschiebungsfeld kann das Verzerrungsfeld berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Offenbar verbleiben im Rahmen der klassischen Laminattheorie nur noch die drei ebenen Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  und  $\gamma_{xy}$ . Die kinematischen Gleichungen werden üblicherweise in einer Vektor-Matrix-Schreibweise zusammengefasst wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0(x, y) \\ \varepsilon_{yy}^0(x, y) \\ \gamma_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0(x, y) \\ \kappa_{yy}^0(x, y) \\ \kappa_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Hierin bedeuten  $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$  und  $\gamma_{xy}(x, y, z)$  die Dehnungen und Gleitungen an einem beliebigen Punkt im Laminat, und  $\varepsilon_{xx}^0(x, y)$ ,  $\varepsilon_{yy}^0(x, y)$ ,  $\gamma_{xy}^0(x, y)$  sind die Verzerrungen der Laminatmittelebene, angedeutet durch den hochgestellten Index 0. Die Größen  $\kappa_{xx}^0(x, y)$ ,  $\kappa_{yy}^0(x, y)$  und  $\kappa_{xy}^0(x, y)$  sind die Verkrümmungen und die Verdrillung der Laminatmittelebene. Die kinematischen Größen sind in Abb. 2.4 verdeutlicht. Sie sind

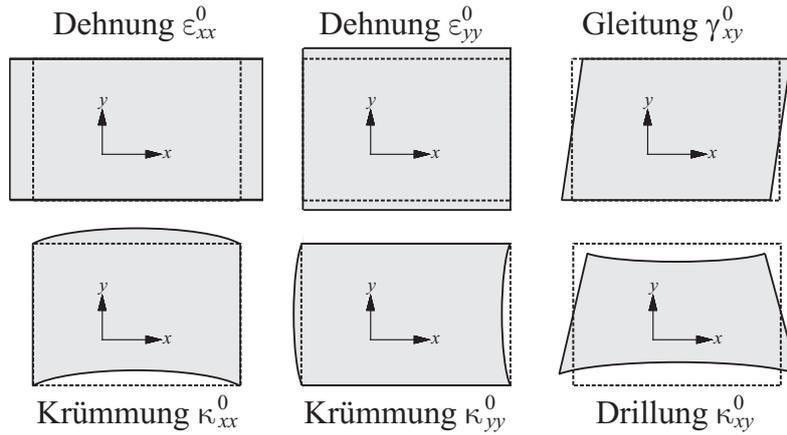


Abb. 2.4: Verzerrungen der Laminat-Mittelebene (oben), Verkrümmungen und Verdrillung der Laminat-Mittelebene (unten), aus [100].

definiert als:

$$\underline{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}^0 = \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Mit Hilfe der nun eingeführten kinematischen Größen können die Spannungen in jeder Einzelschicht des betrachteten Laminats berechnet werden. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz für die  $k$ -te Schicht unter Berücksichtigung des ebenen Spannungszustands ergibt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right], \quad (2.13)$$

mit  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$ . Die beiden Normalspannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und die Schubspannung  $\tau_{xy}$  hängen dabei von den sog. transformierten reduzierten Steifigkeiten  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) ab, die sich aus der Transformation der reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  aus dem lokalen Schichtkoordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  in das globale System  $x, y, z$  ergeben wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die reduzierten Steifigkeiten lassen sich in jeder Schicht berechnen als:

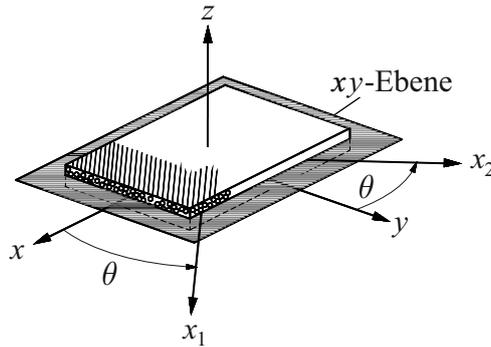


Abb. 2.5: Achsentransformation für ein orthotropes Material, aus [100].

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad (2.15)$$

wobei  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  und  $\nu_{21}$  die elastischen Eigenschaften der betrachteten Einzelschicht sind, die wir hier als orthotrop annehmen wollen.

Wir betrachten im Folgenden die Schnittgrößen eines Laminats nach der klassischen Laminattheorie. Diese sind die Schnittkraftflüsse  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  sowie die Schnittmomentenflüsse  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$ ,  $M_{xy}^0$ . Die Schnittkraftflüsse lassen sich aus der Integration der Spannungen

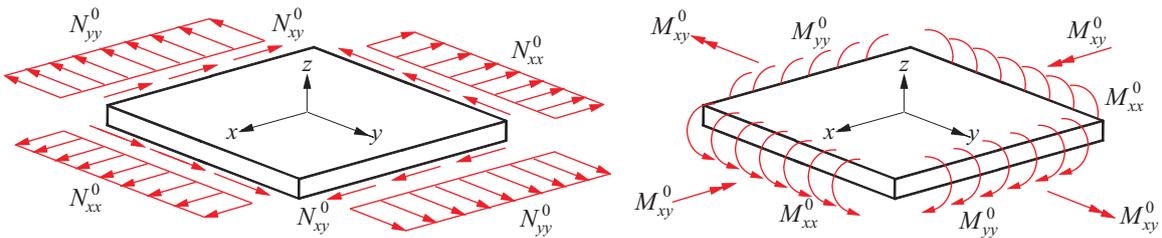


Abb. 2.6: Schnittgrößen eines Laminats, aus [100].

durch die Dicke ermitteln:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz, \quad (2.16)$$

wobei die Integrale aufgrund der unstetigen Steifigkeitsverteilungen in den Schichten in die Summe aus Teilintegralen zerfällt:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz. \quad (2.17)$$

Genauso wird für die Schnittmomentenflüsse verfahren:

$$\begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz. \quad (2.18)$$

Substitution des Hookeschen Gesetzes (2.13) ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] dz, \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] z dz. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ausführen der Integrationen ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wir haben hierin die folgenden Abkürzungen verwendet ( $i, j = 1, 2, 6$ ):

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz, \\ B_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz, \\ D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Größen  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  und  $D_{ij}$  spielen bei der Beschreibung von Laminaten eine zentrale Rolle und werden als Membransteifigkeiten, Koppelsteifigkeiten und Plattensteifigkeiten bezeichnet. In dem Falle, dass die Steifigkeiten der Einzelschichten in der jeweiligen Schicht konstant sind, können die Integrale in Summen zerlegt werden, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (2.22)$$

In kondensierter Form ergibt sich (2.20) als:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Dies ist das konstitutive Gesetz für ein Laminate im Rahmen der klassischen Laminattheorie. Die hierin auftauchende Matrix nennt man auch Steifigkeitsmatrix oder umgangssprachlich ABD-Matrix. Symbolisch lautet (2.23):

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Eine Besonderheit bei der Analyse von Laminaten sind die sog. Koppeleffekte. Das Konstitutivgesetz (2.23) zeigt, dass bei einer voll belegten Steifigkeitsmatrix eine beliebige Schnittgröße alle Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$ , aber auch die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  und die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminatmittelebene verursacht. Somit sind bei Laminaten i. Allg. die Scheiben- und die Plattenwirkung miteinander gekoppelt. Die Koppeleffekte werden durch die Terme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  im Membranquadranten, die Terme  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  im Plattenquadranten, sowie alle Koppelsteifigkeiten  $B_{ij}$  hervorgerufen und werden wie folgt benannt.

Die sog. Schubkopplung tritt bei Laminaten auf, bei denen die Membranterme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  ungleich null sind. Dann verursachen Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  die Laminat-Schnittkraft  $N_{xy}^0$ . Eine Schubverzerrung  $\gamma_{xy}^0$  verursacht die beiden Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$  und  $N_{yy}^0$ . Laminat, bei denen die Schubkopplungs-Terme  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  verschwinden, werden als ausgeglichen bezeichnet.

Die sog. Biege-Drill-Kopplung tritt auf, wenn die Plattensteifigkeiten  $D_{16}$  und  $D_{26}$  nicht verschwinden. Die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ ,  $\kappa_{yy}^0$  rufen dann das Drillmoment  $M_{xy}^0$  hervor. Analog sorgt die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  für das Auftreten der beiden Biegemomente  $M_{xx}^0$  und  $M_{yy}^0$ .

Die sog. Biege-Dehn-Kopplung liegt stets dann vor, wenn eine oder mehrere Koppelsteifigkeiten  $B_{ij}$  nicht zu null werden. Die Verzerrungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  sorgen dann für das

Auftreten der Schnittmomente  $M_{xx}^0, M_{yy}^0, M_{xy}^0$ . Genauso sind dann die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0, \kappa_{yy}^0$  und die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  die Ursache für das Auftreten der Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$ .

Koppeleffekte sind i. Allg. unerwünschte Effekte, die ausschließlich bei geschichteten Flächentragwerken auftreten und von klassischen isotropen Flächentragwerken nicht bekannt sind. Sie sorgen meist für eine Herabsetzung der mechanischen Performance solcher Bauteile und erschweren die analytische Behandlung von Problemstellungen der Composite-Mechanik oftmals erheblich.

Wir wollen nachfolgend die Belegung des Konstitutivgesetzes (2.23) für ausgewählte Klassen von Laminaten behandeln.

Liegt der besondere Spezialfall eines Laminats mit einer einzigen Einzelschicht ( $N = 1$ ) vor, die darüber hinaus isotrop ist, dann vereinfacht die ABD-Matrix ganz erheblich wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

In einem solchen Laminat, das gleichzusetzen ist mit einer isotropen Scheibe bzw. Platte, treten also keinerlei Koppeleffekte auf. Das Scheiben- und das Plattenverhalten sind also vollständig entkoppelt. Somit beinhaltet die klassische Laminattheorie die Plattentheorie nach Kirchhoff als Spezialfall. Die einzelnen Einträge der Konstitutivmatrix lassen sich angeben wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{11} = Q_{11}h &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & A_{22} = Q_{22}h &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ A_{12} = Q_{12}h &= \frac{\nu Eh}{1-\nu^2}, & A_{66} = Q_{66}h &= Gh, \\ D_{11} = Q_{11}\frac{h^3}{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{22} = Q_{22}\frac{h^3}{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ D_{12} = Q_{12}\frac{h^3}{12} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{66} = Q_{66}\frac{h^3}{12} &= \frac{Gh^3}{12}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit den isotropen Eigenschaften  $E, G$  und  $\nu$ .

Der Spezialfall einer orthotropen Einzelschicht ( $N = 1$ ) ergibt eine identische Matrix wie in (2.25), jedoch berechnen sich die einzelnen Steifigkeitsgrößen basierend auf den Ingenieurkonstanten  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, \nu_{21}$  und  $G_{12}$ :

$$\begin{aligned} A_{11} = Q_{11}h &= \frac{E_{11}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & A_{22} = Q_{22}h &= \frac{E_{22}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ A_{12} = Q_{12}h &= \frac{\nu_{12}E_{22}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & A_{66} = Q_{66}h &= G_{12}h, \\ D_{11} = Q_{11}\frac{h^3}{12} &= \frac{E_{11}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_{22} = Q_{22}\frac{h^3}{12} &= \frac{E_{22}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ D_{12} = Q_{12}\frac{h^3}{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_{66} = Q_{66}\frac{h^3}{12} &= \frac{G_{12}h^3}{12}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Somit enthält die klassische Laminattheorie auch die Kirchhoffsche Theorie orthotroper Platten als weiteren Spezialfall.

Liegt eine anisotrope Einzelschicht vor, deren Materialhaupttrichtungen  $x_1, x_2, x_3$  nicht mit dem globalen Bezugssystem  $x, y, z$  zusammenfallen, dann ergibt sich eine Belegung des Konstitutivgesetzes wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

In diesem Falle treten also üblicherweise sowohl Schubkopplung als auch Biege-Drill-Kopplung auf. Die Biege-Dehn-Kopplung hingegen ergibt sich hier nicht. Die Steifigkeitsgrößen in (2.28) lassen sich angeben als:

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij}h, \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12}. \quad (2.29)$$

Liegt ein Laminat vor, das hinsichtlich seiner Mittelebene symmetrisch aufgebaut ist, dann kann die Biege-Dehn-Kopplung in jedem Fall ausgeschlossen werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Jedoch kann auch bei symmetrischen Laminaten nicht unbedingt davon ausgegangen werden, dass die verbleibenden Koppeleffekte zu null werden.

Kreuzverbunde sind Laminare, bei denen die Einzelschichten ausschließlich unter den Winkeln  $\theta_k = 0^\circ$  oder  $\theta_k = 90^\circ$  ausgerichtet sind. Bei Kreuzverbunden verschwindet stets die Schubkopplung ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), genauso wie die Biege-Drill-Kopplung ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ). Ob Biege-Dehn-Kopplung vorliegt hängt ausschließlich von den Symmetrieeigenschaften des betrachteten Laminats ab.

Winkelverbunde sind solche Laminare, bei denen zu jeder Schicht mit dem Winkel  $\theta$  eine Schicht mit dem entgegengesetzten Winkel  $-\theta$  vorliegt. Die Position der Schichten im Schichtverbund spielt bei dieser Definition keine Rolle. Winkelverbunde sind stets ausgeglichen, so dass  $A_{16} = A_{26} = 0$  gilt. Ob Biege-Drill-Kopplung sowie Biege-Dehn-Kopplung auftreten hängt vom konkreten Fall ab. Die typische Belegung der ABD-Matrix eines symmetrischen Winkelverbundes ist nachfolgend gegeben:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Biege-Drill-Kopplung ist hier zu berücksichtigen.

In vielen technischen Anwendungen finden die sog. quasi-isotropen Laminat-Verwendungen. Es handelt sich dabei um Laminat-Verwendungen, bei denen das Scheibenverhalten isotrope Eigenschaften aufweist. Es gilt dann  $A_{11} = A_{22}$  und  $A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12})$ . Eine typische ABD-Matrix für einen symmetrischen quasi-isotropen Lagenaufbau lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Quasi-isotrope Laminat-Verwendungen sind somit in allen Fällen ausgeglichen und weisen keine Schubkopplung auf. Hingegen weist der Plattenquadrant nach wie vor anisotrope Eigenschaften auf, und Biege-Drill-Kopplung ist i. Allg. zu berücksichtigen. Ob Biege-Dehn-Kopplung auftritt hängt ausschließlich von den Symmetrieeigenschaften des Laminats ab.

## 2.4 Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Eine Erweiterung der klassischen Laminattheorie liegt mit der sog. Schubdeformationstheorie 1. Ordnung vor. Sie basiert auf den folgenden Annahmen:

- Auch hier gehen wir von einem ebenen Spannungszustand hinsichtlich der Dickenrichtung aus, und zwar insbesondere bezüglich der Normalspannung  $\sigma_{zz}$ .
- Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte wird aufrecht erhalten, jedoch wird die Normalenhypothese fallengelassen. Ein ebener Querschnitt bleibt demnach im verformten Zustand zwar eben, aber nicht mehr notwendigerweise senkrecht zur Laminatmittelebene.
- Die Dicke  $h$  bleibt auch hier während des Verformungsvorganges unverändert.

Die sich daraus ergebende Kinematik ist in Abb. 2.7 gegeben. Demnach sind die beiden

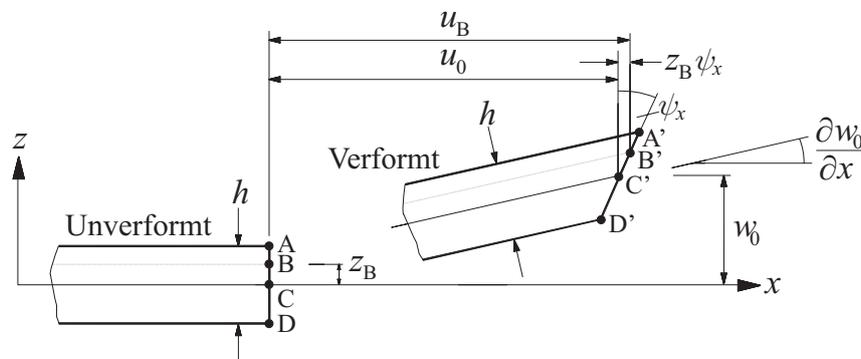


Abb. 2.7: Laminat-Element nach Schubdeformationstheorie 1. Ordnung, aus [100].

Biege-Drill-Winkel  $\psi_x$  und  $\psi_y$  nun nicht mehr mit der Neigung der Laminatmittelebene in Verbindung zu bringen, sondern stellen vielmehr eigenständige und unabhängige Freiheitsgrade

dar. Nach Schubdeformationstheorie 1. Ordnung liegen also fünf Freiheitsgrade vor, nämlich die Verschiebungen  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  der Laminatmittelebene (die auch in der klassischen Laminattheorie auftauchen) und die beiden Biegewinkel  $\psi_x$  und  $\psi_y$ .

Das Verschiebungsfeld nach der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung lässt sich an Abb. 2.7 unmittelbar ablesen:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w(x, y) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Das resultierende Verzerrungsfeld lautet dann:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Entgegen der klassischen Laminattheorie verschwinden hier nun die beiden transversalen Schubverzerrungen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  nicht, die sich hier als konstante Funktionen in Dickenrichtung  $z$  ergeben. Die Dehnung  $\varepsilon_{zz}$  bleibt hier jedoch null.

Die ebenen schichtweisen Spannungen lassen sich genau wie im Rahmen der klassischen Laminattheorie berechnen als:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Aus dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz für dreidimensionale anisotrope Festkörper können zusätzlich die transversalen Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Hierin sind  $\bar{C}_{44}$ ,  $\bar{C}_{55}$ ,  $\bar{C}_{45}$  die transformierten Steifigkeiten eines monoklinen Materials. Für nähere Einzelheiten wird z.B. auf [100] verwiesen. Die hiermit ermittelbaren Schubspannungen weisen in jeder Einzelschicht konstante Verläufe auf. Die resultierenden Querkräfte  $Q_x$  und  $Q_y$  lassen sich ermitteln als:

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} dz. \quad (2.37)$$

Zerlegung in Teilintegrale ergibt:

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} dz. \quad (2.38)$$

Ausführen der Integrationen liefert:

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Die neuen Größen  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  und  $A_{45}$  stellen die transversalen Schubsteifigkeiten des Laminats dar:

$$\begin{aligned} A_{44} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{C}_{44} dz = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{44,k} dz, \\ A_{55} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{C}_{55} dz = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{55,k} dz, \\ A_{45} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{C}_{45} dz = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{45,k} dz. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Bei elastischen Schichteigenschaften, die konstant über die Schichtdicke  $h_k$  sind, sind die Integrale elementar lösbar wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{44} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{C}_{44,k} (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=N} \bar{C}_{44,k} h_k, \\ A_{55} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{C}_{55,k} h_k, \\ A_{45} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{C}_{45,k} h_k. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Es ist dabei zu beachten, dass die Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  sind in jeder Laminat-einzelschicht konstant sind. Dies steht jedoch im Gegensatz zu den realen Verhältnissen, wo man i. Allg. parabolische Verläufe antreffen wird. Man schafft sich hier Abhilfe, indem ein sog. Schubkorrekturfaktor  $K$  eingeführt wird, mit dem die Schubsteifigkeiten  $A_{44}$ ,  $A_{55}$ ,  $A_{45}$  modifiziert werden:

$$\begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}_k = K \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Wir werden in allen nachfolgenden Untersuchungen stets den klassischen Wert  $K = \frac{5}{6}$  ansetzen, der für isotrope und orthotrope Platten exakt gilt.

Das Konstitutivgesetz nach der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung lautet schließlich:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{44} & KA_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{45} & KA_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

In symbolischer Form lautet es:

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{B} & \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \\ \underline{\gamma}_S \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

## 2.5 Schubdeformationstheorie 3. Ordnung

Die Schubdeformationstheorie 3. Ordnung geht auf Reddy (s. dazu das Standardwerk [18]) zurück. Sie lässt die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte sowie die Normalenhypothese fallen und lässt Querschnittsverwölbungen zu. Jedoch bleiben hier die Annahmen vom Verschwinden der Normalspannung  $\sigma_{zz}$  und der Unveränderlichkeit der Laminatdicke  $h$  erhalten. Die kinematischen Annahmen nach dieser Theorie sind in Abb. 2.8 im Vergleich mit der klassischen Laminattheorie und der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung dargestellt, die hier der besseren Übersicht noch einmal dargestellt ist. Es wird das folgende Verschiebungsfeld verwendet:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\lambda_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\lambda_y(x, y), \\ w(x, y) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.46)$$

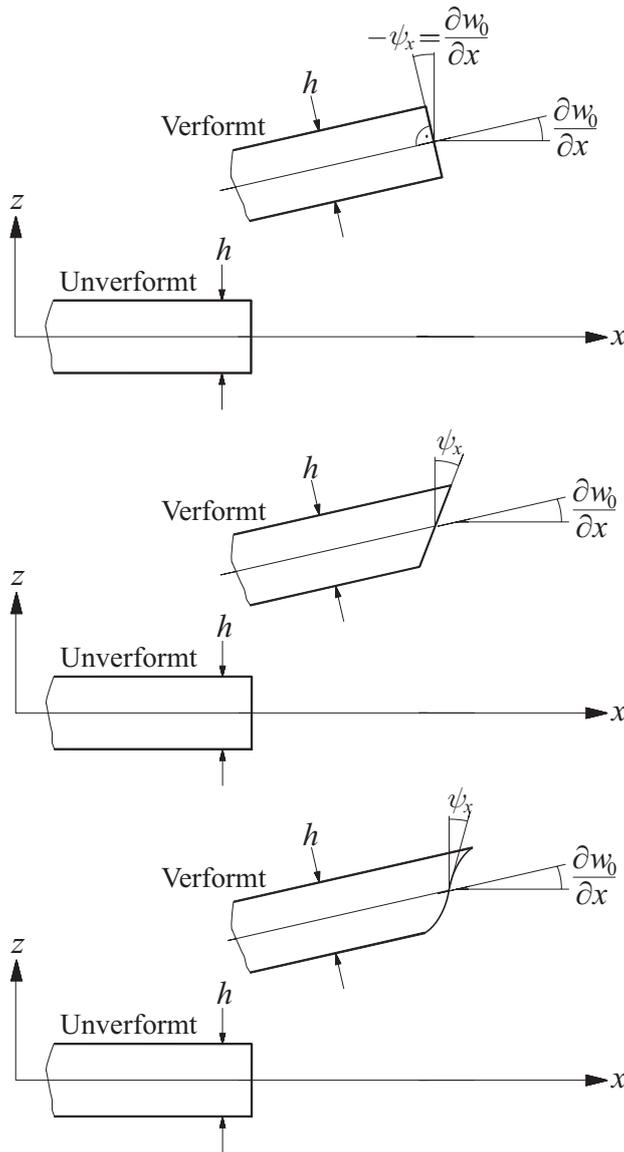
Dabei sind  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  noch unbekannte Funktionen, die die Verformungen des Laminat-Querschnitts abbilden. Es liegen damit zunächst neun unbekannte Funktionen vor. Die Verschiebungen  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  sind die Verschiebungen der Laminatmittelebene, und die Biegewinkel  $\psi_x$  und  $\psi_y$  stellen die Neigungen der Querschnittsverwölbung auf der Laminat-Mittelebene bei  $z = 0$  dar:

$$\psi_x = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \psi_y = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (2.47)$$

Die weiteren Größen  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  lassen sich interpretieren als:

$$2\theta_x = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=0}, \quad 2\theta_y = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=0}, \quad 6\lambda_x = \left. \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right|_{z=0}, \quad 6\lambda_y = \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z=0}. \quad (2.48)$$

Fordert man, dass die transversalen Schubspannungen  $\tau_{yz}$  und  $\tau_{xz}$  an den freien Oberflächen des Laminats bei  $z = -\frac{h}{2}$  und  $z = +\frac{h}{2}$  zu null werden müssen, dann zeigt sich,



## Klassische Laminattheorie

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned}$$

Schubdeformationstheorie  
1. Ordnung

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \psi_x \\ v &= v_0 + z \psi_y \\ w &= w_0 \end{aligned}$$

Schubdeformationstheorie  
3. Ordnung nach Reddy

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \psi_x + z^2 \theta_x + z^3 \lambda_x \\ v &= v_0 + z \psi_y + z^2 \theta_y + z^3 \lambda_y \\ w &= w_0 \end{aligned}$$

Abb. 2.8: Vergleich der einzelnen behandelten Laminattheorien, aus [100].

dass dies nur dann erfüllbar ist, wenn die Schubverzerrungen  $\gamma_{yz}$  und  $\gamma_{xz}$  dort ebenfalls verschwinden. Man erhält daraus die folgenden vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y - h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y &= 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y + h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y &= 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x - h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x &= 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x + h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Es ergibt sich daraus für  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ :

$$\theta_x = 0, \quad \theta_y = 0, \quad \lambda_x = -\frac{4}{3h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \lambda_y = -\frac{4}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right). \quad (2.50)$$

Das Verschiebungsfeld (2.46) geht dann in die folgende Form über:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right), \\ w(x, y) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Es verbleiben somit auch im Rahmen der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung fünf Freiheitsgrade.

Die Verzerrungen lassen sich ermitteln wie folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi_y - \frac{4z^2}{h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_x - \frac{4z^2}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

In einer Vektor-Schreibweise erhalten wir:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^{(0)} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \\ \underline{\varepsilon}^{(3)} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{pmatrix}, \\ \underline{\gamma}^{(0)} &= \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Das Verzerrungsfeld lautet dann:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{\varepsilon}^{(0)} + z\underline{\varepsilon}^{(1)} + z^3\underline{\varepsilon}^{(3)}, \\ \underline{\gamma} &= \underline{\gamma}^{(0)} + z^2\underline{\gamma}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Mit den Schnittgrößendefinitionen

$$\begin{aligned}
 \underline{N}^0 &= \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz, \\
 \underline{M}^0 &= \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz, \\
 \underline{Q} &= \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

sowie den folgenden neu hinzukommenden Schnittkraftgrößen

$$\begin{aligned}
 \underline{P} &= \begin{pmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z^3 dz, \\
 \underline{R} &= \begin{pmatrix} R_y \\ R_x \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} z^2 dz
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

lautet das konstitutive Gesetz für ein Laminat im Rahmen der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy wie folgt:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \\ R_y \\ R_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}_S & \underline{\underline{D}}_S \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_S & \underline{\underline{F}}_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ -\frac{4}{h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

In symbolischer Form lautet es:

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \\ \underline{P} \\ \underline{Q} \\ \underline{R} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}_S & \underline{\underline{D}}_S \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_S & \underline{\underline{F}}_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^{(0)} \\ \underline{\varepsilon}^{(1)} \\ \underline{\varepsilon}^{(3)} \\ \underline{\gamma}^{(0)} \\ \underline{\gamma}^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

mit der Laminat-Steifigkeitsmatrix gemäß:

$$= \begin{bmatrix}
 A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & D_{44} & D_{45} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & D_{45} & D_{55} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & F_{44} & F_{45} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & F_{45} & F_{55}
 \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Neben den bereits bekannten Größen  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{D}$  nach der Klassischen Laminattheorie und der Matrix der transversalen Schubsteifigkeiten  $\underline{A}_S$  nach der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung tauchen hier die zusätzlich Teilmatrizen  $\underline{E}$ ,  $\underline{F}$ ,  $\underline{H}$  sowie  $\underline{D}_S$  und  $\underline{F}_S$  auf, die man als transversale Schubsteifigkeiten interpretieren kann. Die zusätzlichen Kraftgrößen  $\underline{P}$  und  $\underline{R}$  lassen sich als Wölbmomente auffassen. Somit zeigt es sich, dass man sich potentielle Verbesserungen bei der Berechnungsgenauigkeit mit einem erhöhten Aufwand bei der Berechnung im Vergleich zu den vorhergehenden Laminattheorien erkauft.

Die hier neu eingeführten Steifigkeiten lauten:

$$\begin{aligned}
 \underline{E} &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k z^3 dz, \\
 \underline{F} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k z^4 dz, \\
 \underline{H} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k z^6 dz,
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

und

$$\underline{D}_S = \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k z^2 dz,$$

$$\underline{\underline{F}}_S = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k z^4 dz. \quad (2.61)$$

Liegen schichtweise konstante Eigenschaften vor, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^4 - z_{k-1}^4), \\ F_{ij} &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^5 - z_{k-1}^5), \\ H_{ij} &= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^7 - z_{k-1}^7). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Diese Ausdrücke beinhalten Potenzen vierter Ordnung oder höher, so dass davon ausgegangen werden kann, dass der Einfluss dieser Größen erst bei recht dicken Laminaten merklich wird und bei hinreichend dünnen Laminaten vernachlässigbar ist.



# Kapitel 3

## Vorauslegung eines Hallenrahmens

### 3.1 Struktur und Einwirkungen

Um möglichst praxisrelevante Ergebnisse zu erarbeiten, wird als Referenz eine typische Hallenstruktur betrachtet, die im Bauwesen viele unterschiedliche Einsatzmöglichkeiten besitzt. Neben Veranstaltungs-, Sport- und Industriehallen wird diese Hallenstruktur auch für Bahnhöfe und Flughäfen eingesetzt. Eine übliche Hallenkonstruktion besteht aus mehreren hintereinander gelegenen Rahmen (siehe Abbildung 3.1). Zwischen den einzelnen Rahmen werden Querträger bzw. Pfetten eingebaut. An den Pfetten werden sowohl Dach- und Wandverkleidungen als auch Dachrinnen montiert. Zusätzlich gibt es noch Windverbände, die schräg zwischen den Rahmen bzw. am Traufband und an gewissen Punkten der Binder angebunden werden.

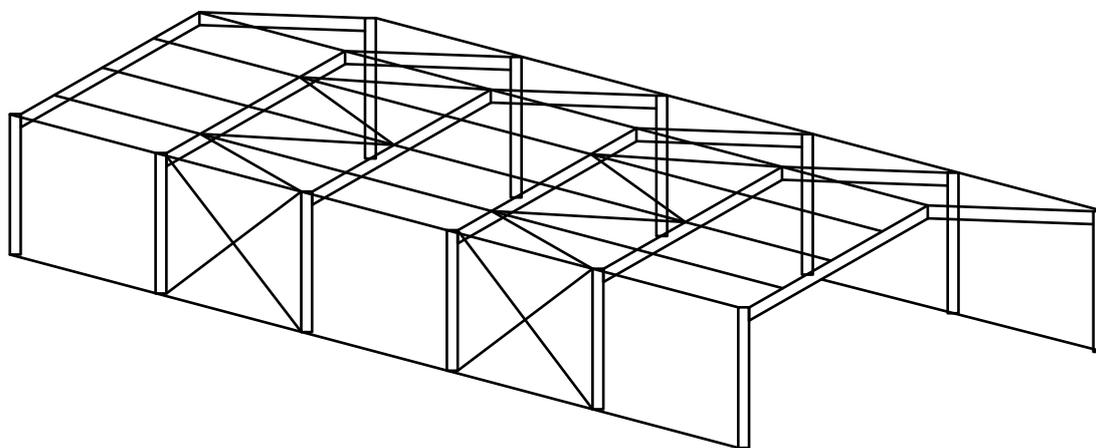


Abb. 3.1: Typische Hallenstruktur im Bauwesen.

In dieser Arbeit soll nicht eine vollständige Hallenstruktur analysiert werden, sondern nur ein einzelner Hallenrahmen. Hierbei setzt sich jede einzelne Rahmenstruktur aus zwei Stielen und zwei Riegeln zusammen. Die vertikal aufgestellten Träger, die als fest im den Boden eingespannt angenommen werden, sind die Stiele. Die Riegel bilden die Grundstruktur für das Hallendach. Folgende Vereinfachungen werden hierbei angenommen:

- Sowohl die Verbindung zwischen den Stielen und Riegeln als auch der Anschluss zwischen den linken und rechten Riegeln (Firstpunkt genannt) werden als biegesteif angenommen.

- Die Biegebelastungen zwischen den einzelnen Hallenelementen werden ohne Einschränkungen übertragen.
- Die Stiele werden als fest eingespannt angenommen. An diesen Enden werden sowohl die drei translatorischen ( $u, v, w$ ) als auch die drei rotatorischen ( $R_x, R_y, R_z$ ) Freiheitsgrade blockiert.
- Verbindungselemente und Anchlusselemente werden in hier nicht berücksichtigt.
- Die vier Träger können einen beliebigen Querschnitt besitzen. Typische Varianten wären z.B. I-, T-, C, Z-, und L-Profile.

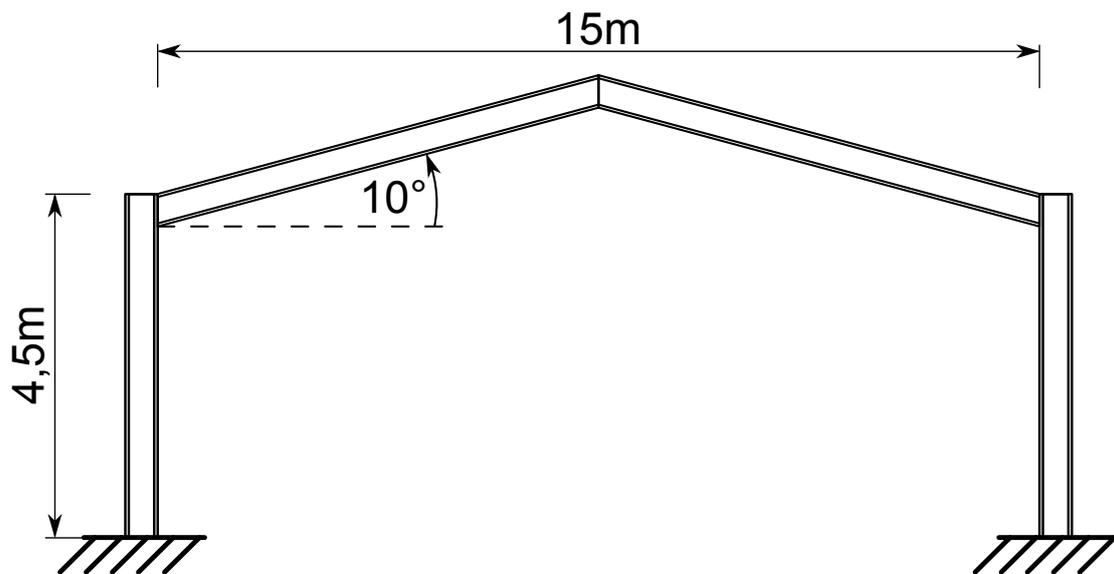


Abb. 3.2: Der analysierte Hallenrahmen.

Durch die Nichtberücksichtigung der Pfette, die durch den Firstpunkt verläuft, können bestimmte globale Stabilitätsprobleme des Hallenrahmens auftreten. Die Riegel können ohne seitliche Stützung ungehindert den Stabilitätsfall Biegedrillknicken aufweisen. Werden die oben angeführten Bedingungen eingeführt, besteht der zu analysierende Rahmen nur noch aus vier Trägern, wobei jeweils zwei Stiele und Riegel vorhanden sind.

Die Abmessungen der Rahmenstruktur können aus der Abbildung 3.2 entnommen werden. Dementsprechend können folgende Maße definiert werden:

- Spannweite  $b = 15 \text{ m}$
- Traufhöhe  $h_t = 4,5 \text{ m}$
- Dachneigung  $\varphi = 10^\circ$ .

Die Ausdehnung der gesamten Hallenstruktur in der Längsrichtung kann mehrere Dutzend Meter annehmen, jedoch ist das Längenmaß frei wählbar. Der Abstand zwischen den einzelnen Rahmen soll 3 m betragen. Angesichts dieser Bemaßungen können für die einzelnen Träger folgende Längen ermittelt werden:

- Stiellänge  $L_s = 4,5 \text{ m}$

- Riegellänge  $L_r = 7,615 \text{ m}$ .

In der folgenden Abbildung sind die Abmessungen grafisch dargestellt.

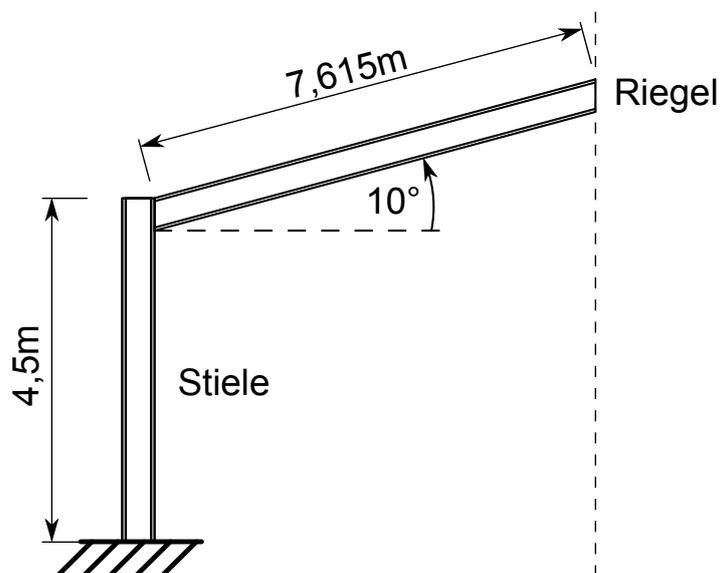


Abb. 3.3: Abmessungen der Stiele und Riegel.

Weitere typische Abmessungen der Hallenquerrichtung, die im Rahmen des Bauwesens eingesetzt werden, sind in der folgenden Tabelle aufgelistet. In dieser Arbeit wird haupt-

Hallennummer	Traufhöhe $h_t$ [m]	Spannweite $b$ [m]	Dachneigung $\varphi$ [°]
I	4,0	12	5
II	4,0	12	10
III	4,5	15	5
IV	4,5	15	10
V	5,0	20	5
VI	5,0	20	10

Tabelle 3.1: Typische Hallenabmessungen.

sächlich die Halle IV in Betracht gezogen und untersucht. Im nächsten Schritt werden die auf den Hallenrahmen einwirkenden Belastungstypen beschrieben. Im Allgemeinen werden bei der Auslegung von Hallenstrukturen folgende Belastungen berücksichtigt:

- Eigengewicht infolge der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Schneelasten nach DIN-1055-5
- Windlasten nach DIN-1055-4
- Lasten aus Temperaturdifferenzen.

In dieser Arbeit wird die letzte Lastannahme jedoch vernachlässigt. In den nächsten Schritten werden die einzelnen Lastannahmen, die auf die Rahmenstruktur wirken, näher beschrieben.

### Eigengewicht

Das Eigengewicht der Rahmenstruktur hängt sowohl von der Materialauswahl als auch von der Querschnittsgeometrie der verwendeten Träger ab. Das Eigengewicht bezieht sich immer auf die Gesamtlänge eines Bauteils. Bei geneigten Bauteilen, wie z.B. dem Riegel in der Rahmenstruktur, muss das Eigengewicht sich auf die gesamte geneigte Länge des Bauteils beziehen (siehe Abbildung 3.4).

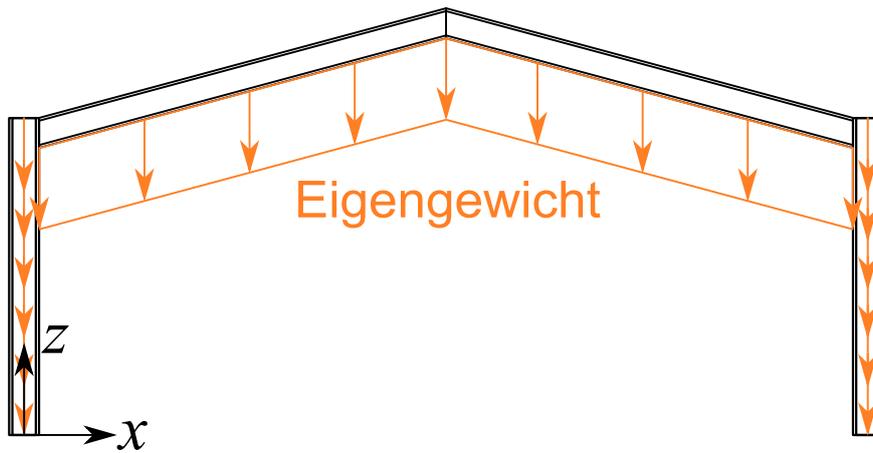


Abb. 3.4: Hallenrahmen unter Eigengewicht.

Das Eigengewicht wirkt stets in Richtung der Erdbeschleunigung. Allgemein wird das auf die Länge beziehende Eigengewicht wie folgt berechnet:

$$G_E = \frac{F}{L}. \quad (3.1)$$

Über das zweite Newtonsche Gesetz

$$F = m \cdot g \quad (3.2)$$

und über die Formel der Dichte  $\rho$

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (3.3)$$

wobei sich das Volumen  $V$  aus der Multiplikation der Querschnittsfläche  $A$  und der Gesamtlänge  $L$  eines Bauteiles bildet (es gilt:  $V = A \cdot L$ ), kann für das Eigengewicht folgende Gleichung abgeleitet werden:

$$G_E = \frac{F}{L} = \frac{m \cdot g}{L} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{L} = \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot L}{L} \implies G_E = \rho \cdot g \cdot A, \quad (3.4)$$

Das Eigengewicht hängt von der Dichte  $\rho$  des Werkstoffs, von der Erdbeschleunigung  $g$  und der Querschnittsfläche  $A$  des Bauteils ab.



Schneelastzone	Charakteristische Schneelast [ $\frac{kN}{m^2}$ ]	Mindestschneelast [ $\frac{kN}{m^2}$ ]
Zone 1	$s_k = 0,19 + 0,91 \left(\frac{A_k+140}{760}\right)^2$	$\geq 0,65$
Zone 1a	$s_k = 1,25 \left(0,19 + 0,91 \left(\frac{A_k+140}{760}\right)^2\right)$	$\geq 0,81$
Zone 2	$s_k = 0,25 + 1,91 \left(\frac{A_k+140}{760}\right)^2$	$\geq 0,85$
Zone 2a	$s_k = 1,25 \left(0,25 + 1,91 \left(\frac{A_k+140}{760}\right)^2\right)$	$\geq 1,06$
Zone 3	$s_k = 0,31 + 2,91 \left(\frac{A_k+140}{760}\right)^2$	$\geq 1,10$

Tabelle 3.2: Formeln der charakteristischen Schneelast für alle Schneelastzonen [49].

von  $s_k = 0,328 \frac{kN}{m^2}$ . Da dieser Wert niedriger ist als der feste Sockelbetrag (siehe Tabelle 3.2), wird die charakteristische Schneelast mit  $s_k = 0,85 \frac{kN}{m^2}$  festgelegt.

Die Schneelast wirkt ausschließlich auf die beiden geneigten Riegel. Die anzusetzende Schneelast wirkt stets vertikal in Richtung der Erdbeschleunigung. Besitzt die Struktur einen Dachneigungswinkel, muss die charakteristische Schneelast  $s_k$  mit einem Formbeiwert  $\mu(\varphi)$  multipliziert werden. Dieser Formbeiwert hängt vom Neigungswinkel des Dachs ab. Für diesen Formbeiwert  $\mu(\varphi)$  gibt es in Bezug auf bestimmte Winkel einen Wert, der in Tabelle 3.3 wiedergegeben wird. Angesichts dieser Tabelle ergibt sich bei einem Dachneigungswinkel von  $\varphi = 10^\circ$  ein Formbeiwert von  $\mu(\varphi = 10^\circ) = 0,8$ . Die Schneelast wird als

Dachneigungswinkel $\varphi$ [°]	Formbeiwert $\mu(\varphi)$ [-]
$0^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$	0,8
$30^\circ < \varphi \leq 60^\circ$	$\frac{0,8(60^\circ - \varphi)}{30^\circ}$
$\varphi > 60^\circ$	0

Tabelle 3.3: Formbeiwert abhängig vom Dachneigungswinkel [49].

Linienlast angegeben. Aus diesem Grund muss die wirkende Schneelast, die sich auf eine Fläche bezieht, mit einer Referenzlänge  $a_{ref}$  multipliziert werden. Im Folgendem wird für die Referenzlänge  $a_{ref} = 3m$  festgelegt. Die anzusetzende Schneelast wird folgendermaßen berechnet:

$$S_L = \mu(\varphi) s_k a_{ref} \quad (3.6)$$

und es stellt sich ein Wert von  $S_L = 2040 \frac{N}{m}$  ein. Die auf die Rahmenstruktur wirkende Schneelast wird in der folgenden Abbildung grafisch dargestellt.

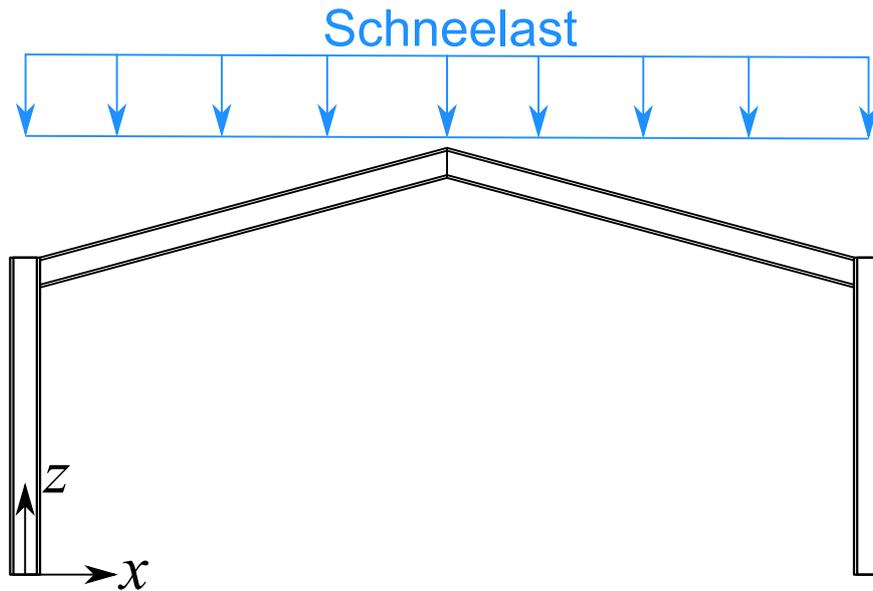


Abb. 3.6: Hallenrahmen unter Schneelast.

## Windlast

Wir beschränken uns auf die Windlasten, die als maßgebliche Horizontallast gelten. Diese Lasteinwirkung ist nach der Norm DIN-1055-4 ausführlich definiert worden. Die Windlast wirkt auf die äußere Fassade der Struktur und ist unabhängig von der Himmelsrichtung. Da hier ein ideal geschlossenes System untersucht wird, werden Windlasten im Innenbereich nicht berücksichtigt. Die auf die Struktur wirkenden Windlasten werden in Form von Winddrücken bzw. Windsogen beschrieben. Hierbei wirken sie stets normal zu der angeströmten Oberfläche. Als charakteristische Last wird die Windlast  $W_{l,i}$  wie folgt berechnet:

$$W_{l,i} = c_{p,i} q(z_{ref}), \quad (3.7)$$

wobei  $c_{p,i}$  der aerodynamische Druckbeiwert und  $q(z_{ref})$  der Geschwindigkeitsdruck abhängig von der Bezugshöhe sind. Der Geschwindigkeitsdruck, im folgenden Staudruck genannt, wird über die Windgeschwindigkeit  $v_w$  bestimmt. Sowohl die Geschwindigkeit als auch der Staudruck stehen unmittelbar im Zusammenhang mit der Gebäudehöhe bzw. der Rahmenhöhe. Im Rahmen der neuen DIN-1055-4 können die Windgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der topographischen Lage berücksichtigt werden. Hierfür wird eine Region bzw. ein Gebiet in verschiedene Windzonen aufgeteilt. Abbildung 3.7 zeigt die Windzonenkarte für Deutschland.

Für die in der Abbildung 3.7 dargestellten Windzonen gibt es zeitlich gemittelte Windgeschwindigkeiten und dazugehörige Staudrücke. Die entsprechenden Werte können aus Tabelle 3.4 entnommen werden. Dabei gelten diese Werte nur für Gebäudehöhen von bis zu 10 m über dem Grund. Hierbei muss das bebaute Gelände eben und offen sein.

Windzone	gemittelte Windgeschwindigkeit	Geschwindigkeitsdruck
	$v_{ref} \left[ \frac{m}{s} \right]$	$q_{ref} \left[ \frac{kN}{m^2} \right]$
1	22,5	0,32
2	25,0	0,39
3	27,5	0,47
4	30,0	0,56

Tabelle 3.4: Gemittelte Windgeschwindigkeiten und zugehörige Geschwindigkeitsdrücke [49].

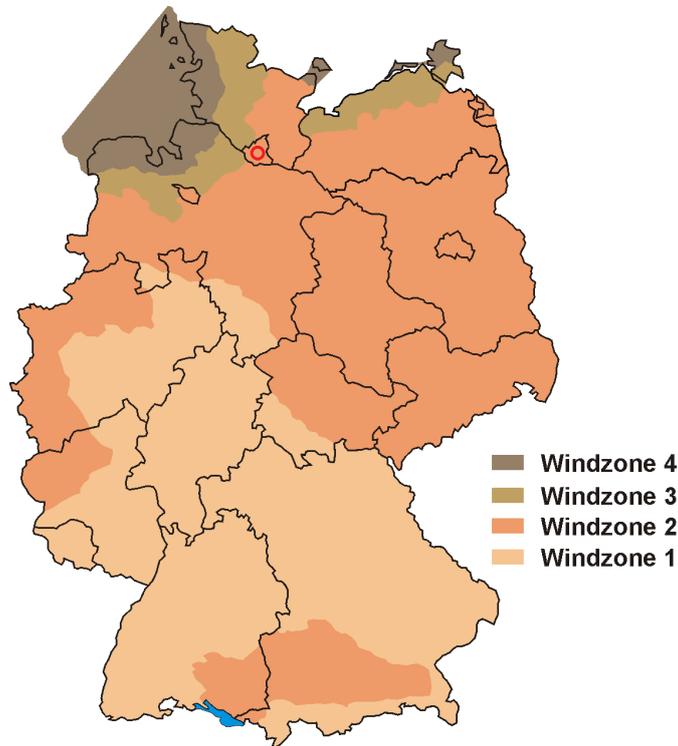


Abb. 3.7: Windzonenkarte für Deutschland.

Reibungseffekte oder ähnliche Einflüsse, die durch umströmte Geometrien entstehen, werden nicht berücksichtigt. In dieser Arbeit wird der Standort für den Bau der Hallenstruktur in Hamburg angenommen. Dementsprechend wird die Windzone 2 als maßgeblich gesehen. Angesichts der Tabelle 3.4 wird im Folgenden mit einem Geschwindigkeitsdruck von  $q_{ref} = 0,39 \frac{kN}{m^2}$  gerechnet.

Auch die Windlasten werden als Liniendrücke angegeben. Aus diesem Grund muss auch der gewählte Staudruck bzw. die Windlast, die sich auf eine Fläche bezieht, mit der zuvor festgelegten Referenzlänge  $a_{ref}$  multipliziert werden.

Im Bezug auf die Struktur können im Allgemeinen die Windlasten wie in der Abbildung 3.8 dargestellt auftreten. Es wird angenommen, dass ein Wind von links nach rechts strömt und am ersten Stiel ein Winddruck erzeugt wird. Der hierfür dazugehörige aerodynamische Widerstandsbeiwert wird mit  $c_{p,1} = 0,8$  festgelegt. Sowohl am rechten Stiel als auch am

rechten Riegel wird sich ein Windsog einstellen, die jeweils einen Widerstandsbeiwert von  $c_{p,2} = 0,5$  und  $c_{p,4} = 0,6$  besitzen.

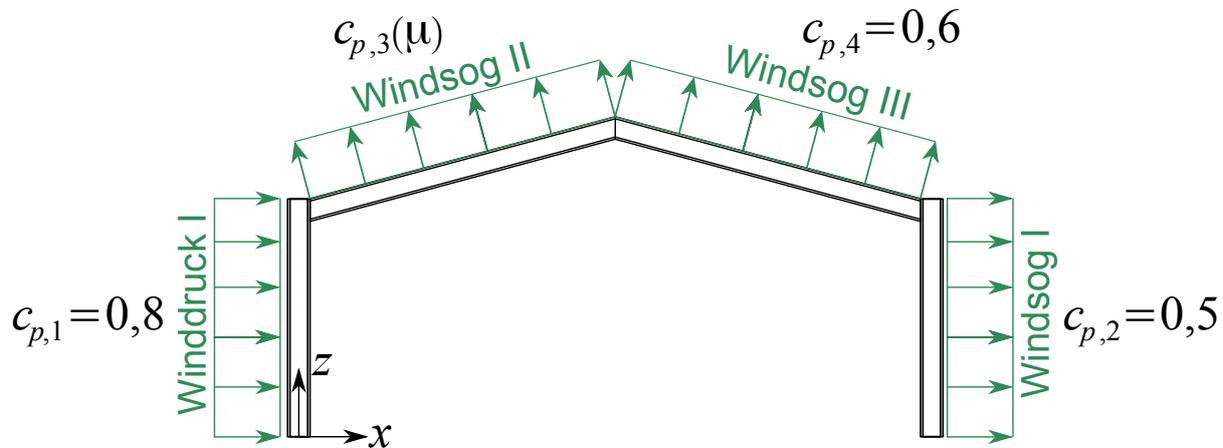


Abb. 3.8: Verteilung der Windlasten und die dazugehörigen Widerstandsbeiwerte nach DIN 1055-4.

Im Vergleich zu den anderen Elementen der Rahmenstruktur kann sich für den linken Riegel ein Winddruck und ein Windsog einstellen. Ob nun Druck oder Sog entsteht, hängt hauptsächlich von der Dachneigung ab. Mit der folgenden Gleichung lässt sich der Widerstandsbeiwert  $c_{p,3}$  in Abhängigkeit vom Neigungswinkel des Dachs wie folgt berechnen:

$$c_{p,3} = 1,3 \sin(\varphi) - 0,6. \quad (3.8)$$

Mit einem Winkel von  $\varphi = 10^\circ$  erhält man einen Beiwert von  $c_{p,3} = -0,3744$ . Das negative Vorzeichen für  $c_{p,3}$  gibt an, dass sich bei dieser Konstellation ein Windsog einstellen wird. Wird die Gleichung (3.7) mit der Referenzlänge  $a_{ref}$  multipliziert ergibt sich folgende allgemeingültige Formel für eine Windlast:

$$W_{L,i} = c_{p,i} q_{ref} a_{ref}. \quad (3.9)$$

Die  $c_{p,i}$ -Werte können aus der Abbildung 3.8 entnommen werden. Folgende vier Windlasten stellen sich für die betrachtete Rahmenstruktur mit Hamburg als Standort ein:

- linker Stiel  $W_{L,1} = 936 \frac{N}{m}$
- rechter Stiel  $W_{L,2} = 585 \frac{N}{m}$
- linker Riegel  $W_{L,3} = 438,1 \frac{N}{m}$
- rechter Riegel  $W_{L,4} = 702 \frac{N}{m}$

## 3.2 Vordimensionierung in Stahlbauweise

In der vorliegenden Arbeit sollen Tragwerkstrukturen bzw. Balken auf ihre Gesamtstabilität untersucht werden, die aus Faserverbundwerkstoffen bestehen. Um eine realitätsnähe

Vorstellung zu erhalten, wie die Abmessungen des Querschnitts eines Balkens für die Hallenstruktur unter bestimmten Lasten aussehen müssen, soll in den nächsten Schritten ein Träger aus Stahl dimensioniert werden. Die ermittelten Geometrien des Stahlträgers sollen als Basisabmessung für einen Composite-Balken gelten.

Das Stabilitätsverhalten von isotropen Strukturen ist weitestgehend analytisch behandelbar. Es gibt eine Vielzahl von Normen und Vorschriften, die das Verhalten der Stabilität von isotropen Stahlstrukturen abbilden, z.B. die DIN 18800-1 oder der Eurocode 3. Hier wird anhand der DIN 18800-1 die Rahmenstruktur mit einem gewöhnlichen Baustahl dimensioniert. Die Dimensionierung des Hallenrahmens erfolgt vor allem hinsichtlich der Auslegung gegen Stabilitätsversagen unter Zuhilfenahme der Finite-Elemente-Methode. Jedoch werden einige Berechnungsgrundlagen aus der DIN 18800-1 entnommen und für den Hallenrahmen eingesetzt.

Bevor es zur Profilwahl kommt, müssen die Bemessungswerte  $F_D$  der Einwirkungen mit einem Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_F$  versehen werden. Wirken mehrere Einwirkungen gleichzeitig, muss der Wert der Einwirkung zusätzlich zum Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_F$  mit einem Kombinationsbeiwert  $\psi$  verrechnet werden. Allgemein gilt:

$$F_D = \gamma_F \psi F_K, \quad (3.10)$$

wobei  $F_D$  der Bemessungswert der Einwirkung ist und  $F_K$  den charakteristischen Wert der Einwirkung präsentiert. Für die ständig wirkende Einwirkung  $G_E$  wird ein Teilsicherheitsbeiwert von  $\gamma_F = 1,35$  festgelegt ([101], [102]). Generell gilt für das Eigengewicht folgende Formel:

$$G_D = \gamma_F G_E. \quad (3.11)$$

Neben dem ständig wirkenden Eigengewicht können veränderliche Einwirkungen auftreten, hierbei können alle wirkenden veränderliche Einwirkungen und jeweils nur eine der veränderlichen Einwirkungen berücksichtigt werden. Bei Berücksichtigung aller Einwirkungen wird  $Q_{i,K}$  folgendermaßen berechnet:

$$Q_{i,D} = \gamma_F \psi_i Q_{i,K}, \quad (3.12)$$

wobei  $\gamma_F = 1,5$  und  $\psi_i = 0,9$  beträgt [102]. Wird nur eine veränderliche Einwirkung betrachtet, muss der Kombinationsbeiwert  $\psi_i$  aus der Gleichung (3.12) entnommen und für  $\gamma_F$  ein Wert von 1,5 eingesetzt werden.

Im nächsten Schritt sollen die relevanten Lastfälle näher beschrieben werden. Insgesamt wurden drei Fälle untersucht, die aus unterschiedlichen Kombinationen der einzelnen Einwirkungen bestehen. Es werden folgende Lastfälle berücksichtigt:

- 1. Lastfall  $\implies$  Eigengewicht + Windlast + Schneelast
- 2. Lastfall  $\implies$  Eigengewicht + Windlast
- 3. Lastfall  $\implies$  Eigengewicht + Schneelast.

Der erste Lastfall kombiniert alle Einwirkungen. Bei den anderen beiden Fällen wird die Schneelast oder die Windlast nicht mit berücksichtigt. Um heraus zu finden, welcher Lastfall ausschlaggebend ist, wurde eine FEM-Analyse durchgeführt. Hierfür wurde der

Hallenrahmen in ANSYS mit Balkenelementen konstruiert und jeweils mit den oben beschriebenen Lastfällen untersucht. Über das FEM-Modell wurden die Schnittgrößen des Hallenrahmens berechnet und miteinander verglichen. Die Querschnitte für die Stiele und Riegel wurden zunächst mit einem IPE-Profil nach DIN 1025-5 festgelegt. Folglich wird ein IPE600-Profil für alle Balken verwendet [104]. Neben der Querschnittsfläche  $A$  und der Dichte  $\rho$  können auch die Abmessungen des Profils aus der IPE-Profil-Tabelle nach DIN 1025-5 entnommen werden [104]. Dementsprechend kann für ein IPE600 ein  $G_E$ -Wert von  $1201 \frac{N}{m}$  festgelegt werden.

Im Folgenden werden alle Lastfälle mit den dazugehörigen Werten der Einwirkungen und den ermittelten Normalkräften, Querkräften und Biegemomenten gegenübergestellt.

### Lastfall 1

Für den ersten Lastfall bilden sich für die Einwirkungen folgende Werte:

- Eigengewicht  $\implies G_D = \gamma_F \cdot G_E = 1,35 \cdot 1201 \frac{N}{m} \Rightarrow G_D = 1622 \frac{N}{m}$
  
- Schneelast  $\implies S_D = \gamma_F \cdot \psi_i \cdot S_L = 1,5 \cdot 0,9 \cdot 2040 \frac{N}{m} \Rightarrow S_D = 2754 \frac{N}{m}$
  
- Windlasten  $\implies W_{D,i} = \gamma_F \cdot \psi_i \cdot W_{L,i}$ 
  1.  $W_{D,1} = 1264 \frac{N}{m}$
  2.  $W_{D,2} = 790 \frac{N}{m}$
  3.  $W_{D,3} = 591 \frac{N}{m}$
  4.  $W_{D,4} = 945 \frac{N}{m}$ .

Über eine FEM-Analyse können folgende Schnittgrößen dargestellt werden:

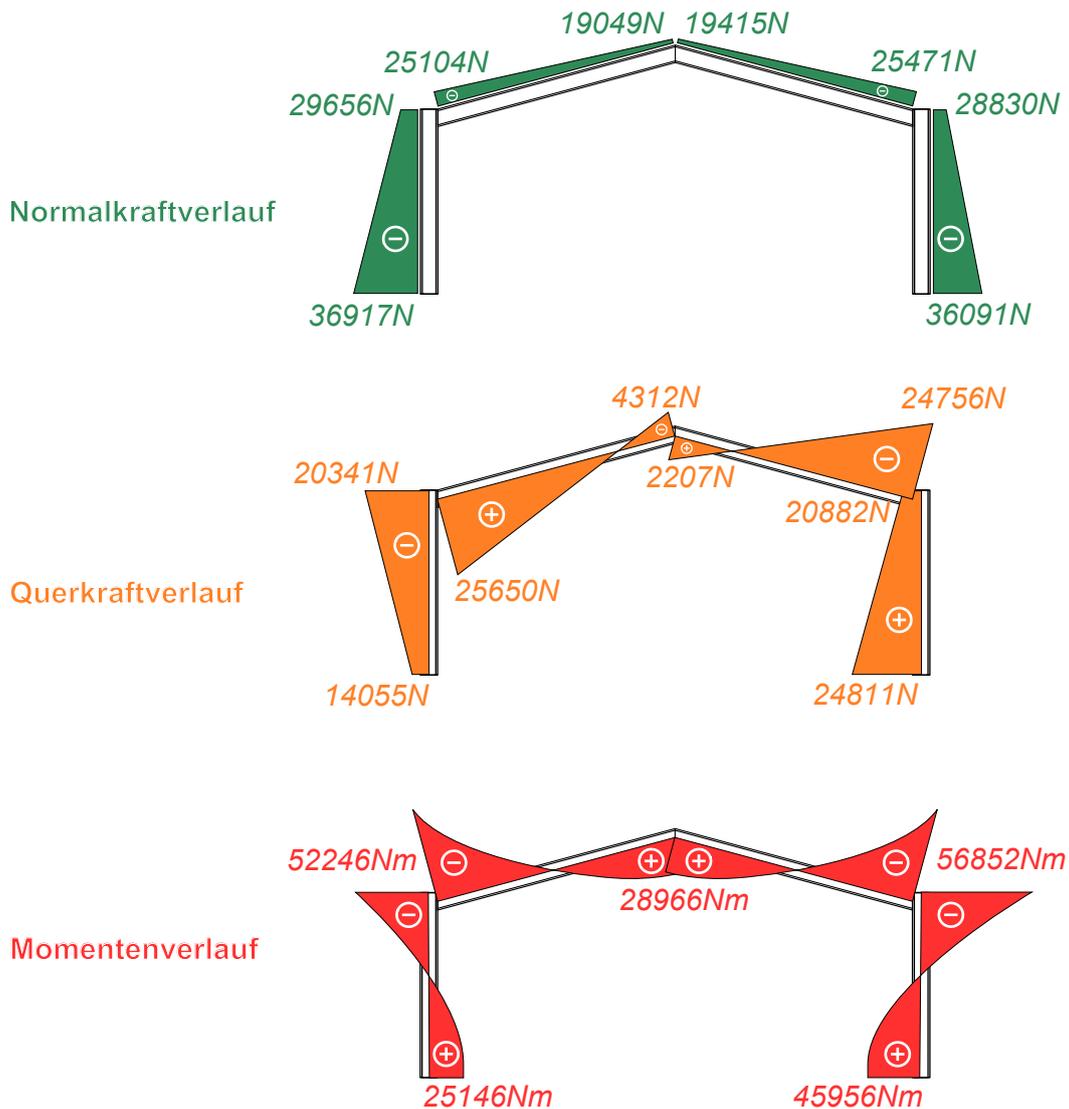


Abb. 3.9: Schnittgrößenverlauf für Lastfall 1.

Die Normalkraft besitzt bei allen vier Abschnitten einen linearen Verlauf und ein negatives Vorzeichen. Die größte Normalkraft tritt bei der linken Einspannung auf und besitzt einen Wert von  $N_{max} = 36917N$ . Auch der Querkraftverlauf verfügt über einen linearen Verlauf, wobei Sprünge zwischen den einzelnen Elementen auftauchen.  $Q_{max} = 25650N$  befindet sich am Anfang des linken Riegels. Für das Moment stellen sich quadratische Verläufe ein. Der maximale Nettobetrag des Moments tritt zwischen dem rechten Riegel und Pfosten auf. Es stellt sich ein Wert von  $M_{max} = 56852Nm$  ein.

## Lastfall 2

Im zweiten Lastfall, bei dem die Schneelast nicht mit berücksichtigt wird, stellen sich folgende Werte für die Einwirkungen ein:

- Eigengewicht  $\Rightarrow G_D = \gamma_F \cdot G_E = 1,35 \cdot 1201 \frac{N}{m} \Rightarrow G_D = 1622 \frac{N}{m}$
- Windlasten  $\Rightarrow W_{D,i} = \gamma_F \cdot \psi_i \cdot W_{L,i}$

1.  $W_{D,1} = 1404 \frac{N}{m}$

2.  $W_{D,2} = 878 \frac{N}{m}$
3.  $W_{D,3} = 657 \frac{N}{m}$
4.  $W_{D,4} = 1053 \frac{N}{m}$ .

Die maximale Normalkraft führt bei dieser Einwirkungskombination zu einem Wert von  $N_{max} = 13625N$ . Sie tritt im unteren Bereich des linken Stiels auf. Auch hier bilden sich nur lineare Verläufe der Normalkraft. Sowohl im linken Riegel als auch am linken Pfosten verläuft die Querkraft entlang eines Trägers linear und wechselt bei einem bestimmten Punkt das Vorzeichen. Die anderen beiden Strukturelemente zeigen über die Länge keine Veränderung des Vorzeichens. Am unteren rechten Pfosten stellt sich ein maximaler Betrag für die Querkraft von  $8739N$  ein. Bei den Momenten kann ein Höchstwert von  $M_{max} = 17101Nm$  festgelegt werden. Dieser Wert stellt sich an der rechten Einspannung ein. Die Momentenverläufe aller Elemente der Rahmenstruktur sind quadratischer Natur. Es bilden sich folgende Schnittgrößenverläufe:

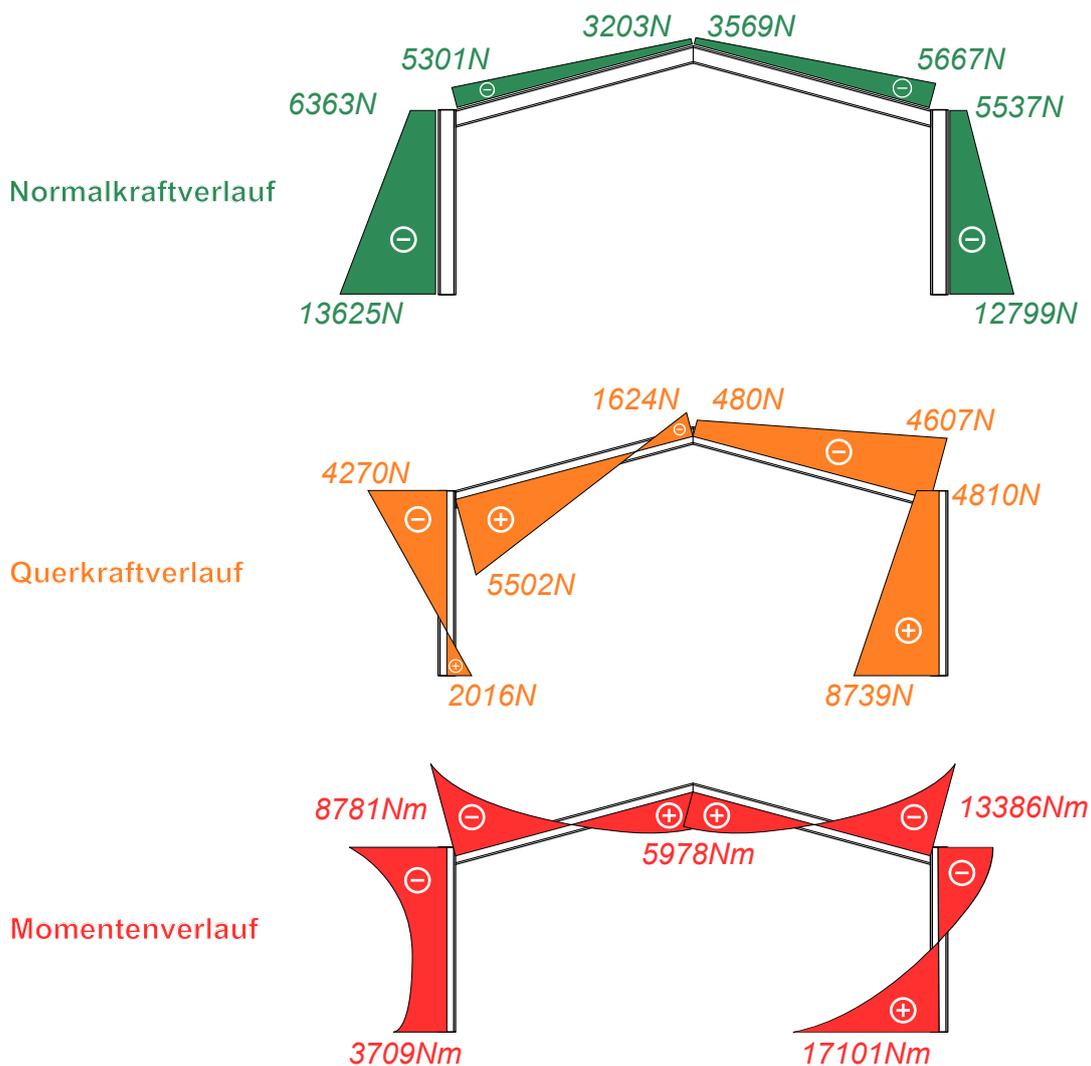


Abb. 3.10: Schnittgrößenverlauf für Lastfall 2.

### Lastfall 3

Der letzte Lastfall vereint das ständig wirkende Eigengewicht mit der Schneelast. Hierfür werden folgende Bemessungswerte mit den dazugehörigen Sicherheitsbeiwerten verwendet:

- Eigengewicht  $\implies G_D = \gamma_F \cdot G_E = 1,35 \cdot 1201 \frac{N}{m} \Rightarrow G_D = 1622 \frac{N}{m}$
- Schneelast  $\implies S_D = \gamma_F \cdot S_L = 1,5 \cdot 2040 \frac{N}{m} \Rightarrow S_D = 3060 \frac{N}{m}$

Unter Berücksichtigung der oben angeführten Lasten bilden sich folgende Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverläufe für die Rahmenstruktur:

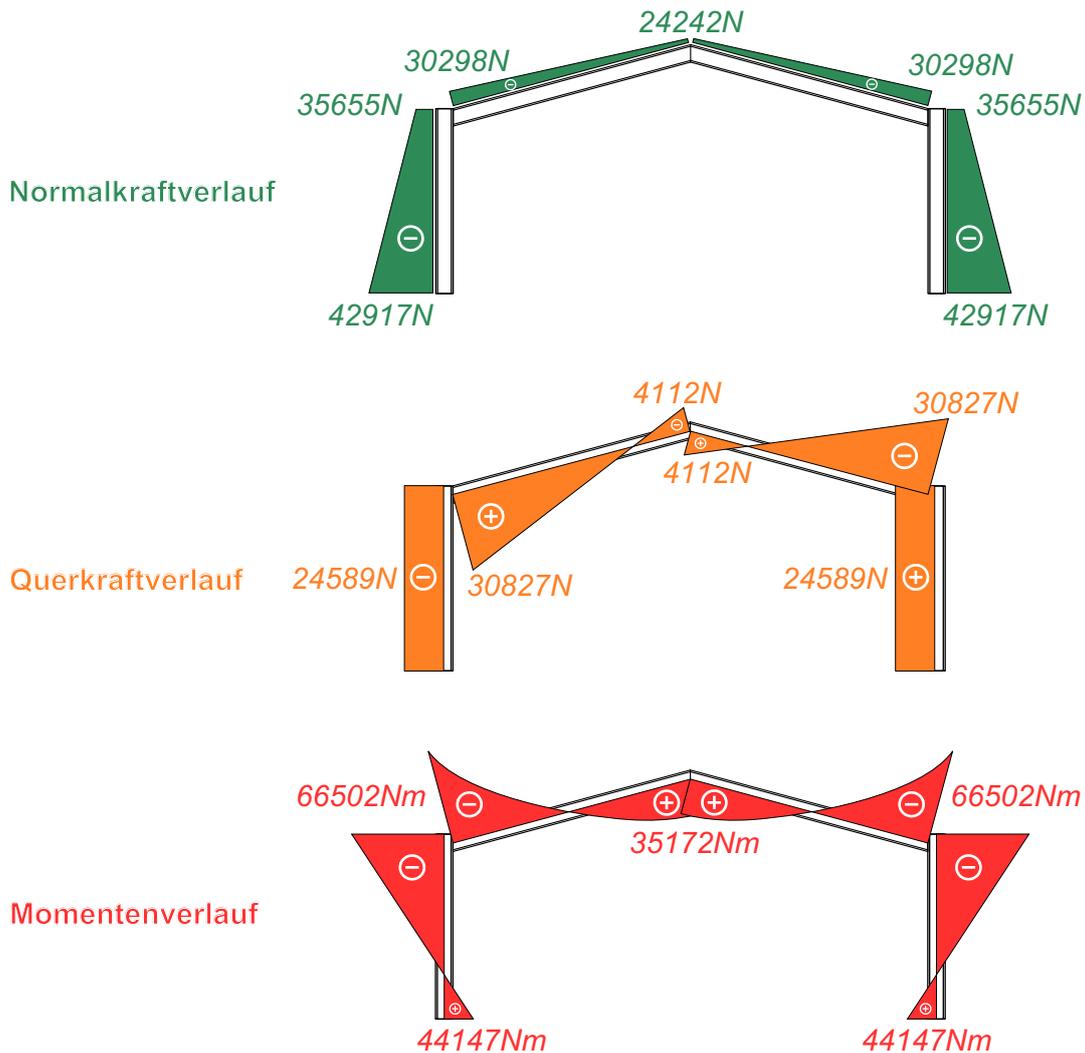


Abb. 3.11: Schnittgrößenverlauf für Lastfall 3.

Die Lastkombination Eigengewicht plus Schneelast sorgt wie schon bei den Lastfällen zuvor für einen linearen Verlauf der Normalkräfte entlang der jeweiligen Balkenlänge. Die maximale Normalkraft kann an den beiden Einspannungen des Systems festgestellt werden. Sie beträgt  $N_{max} = 42917N$ . Beim linken und rechten Pfosten kann ein konstanter Verlauf der Querkraft beobachtet werden, wobei dem linken ein negativen und dem rechten ein positiver Wert zuzuordnen ist. An den Riegeln stellen sich lineare Querkraftverläufe ein, die einen Vorzeichensprung entlang der Länge besitzen. Der Höchstwert

für die Querkraft  $Q_{max} = 30826N$  kann an den beiden Übergängen zwischen dem Stiel und Riegel festgestellt werden. Neben den beiden Stielen, die einen linearen Momentenverlauf besitzen, stellt sich für die Riegel ein quadratischer Verlauf für die Momente ein.  $M_{max} = 66502Nm$  tritt zwischen Stiel und Riegel ein und bildet einen negativen Betrag. Da sich die Rahmenstruktur über die Symmetrieachse unter identischen Einwirkungen vollzieht, stellen sich sowohl für die Normalkraft als auch für die Momente symmetrische Werte ein. Auch die Querkraft besitzt antisymmetrische Beträge, wobei sich die Vorzeichen ändern.

In der Tabelle 3.5 werden alle maximalen Werte der Normalkraft, Querkraft und Momente für alle untersuchten Lastfälle dargestellt und miteinander verglichen. Man würde davon

Lastfall	max. Normalkraft	max. Querkraft	max. Moment
	[N]	[N]	[Nm]
1	36917	25650	56852
2	13625	8739	17101
3	42917	30826	66502

Tabelle 3.5: Vergleich der maximalen Schnittgrößen der drei Lastfälle.

ausgehen, dass der erste Lastfall ausschlaggebend ist, da er alle betrachteten Einwirkungen miteinander vereint. Da an beiden Riegeln ein Windsog erzeugt wird, wirken diese sowohl entgegen der Schneelast als auch entgegen dem ständig wirkenden Eigengewicht. Es kann festgestellt werden, dass der Lastfall 3 (Eigengewicht plus Schneelast) ausschlaggebend ist und für die weitere Dimensionierung in dieser Arbeit als Ausgangsfall dienen soll. Sowohl die Normal- und Querkraft als auch das Biegemoment besitzen bei dieser Lastkombination die höchsten Werte.

Im nächsten Schritten soll ein Profil für die Rahmenstruktur ausgewählt werden, das die Festigkeit des Materials gewährleistet. Wie schon für die Schnittgrößen wird hierfür ein FEM-Modell erstellt. Für aussagekräftigere Ergebnisse wird nun das Modell mit Shell-Elementen konstruiert. Für die Querschnitte der Rahmenstruktur wird ebenfalls ein I-Profil verwendet. An dieser Stelle wird für das Material der Stahl S235 herangezogen. Die Werkstoffkennwerte für diesen Baustahl können aus der Tabelle 3.6 entnommen werden. Hierbei ist die Grenznormalspannung die zulässige Spannung, die bei der Strukturanalyse nicht überschritten werden darf. Der Zusammenhang zwischen der Grenznormalspannung  $f_{y,D}$  und der Streckgrenze  $f_{y,K}$  wird über einen Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  definiert und kann nach der DIN 18800-1 mit 1,1 festgelegt werden [102]. Es gilt folgende Beziehung:

$$f_{y,D} = \frac{f_{y,K}}{\gamma_M} \quad (3.13)$$

Aus der FEM-Berechnung wird die Vergleichsspannung nach von Mises berechnet, die im Allgemeinen folgendermaßen ermittelt wird:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (3.14)$$

Für den ebenen Fall vereinfacht sich die Gleichung (3.14) wie folgt

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}. \quad (3.15)$$

## Stahl S235

Materialkennwert	Symbol	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	$E$	210000	[MPa]
Querkontraktionszahl	$\nu$	0,3	[–]
Streckgrenze	$f_{y,K}$	240	[MPa]
Grenznormalspannung	$f_{y,D}$	218,18	[MPa]

Tabelle 3.6: Materialkennwerte für den Baustahl S235.

In ANSYS kann für isotrope Werkstoffe die Vergleichsspannung automatisch generiert werden. In Abbildung 3.12 ist die Verteilung der Vergleichsspannung nach von Mises für eine Rahmenstruktur aus Stahl dargestellt.

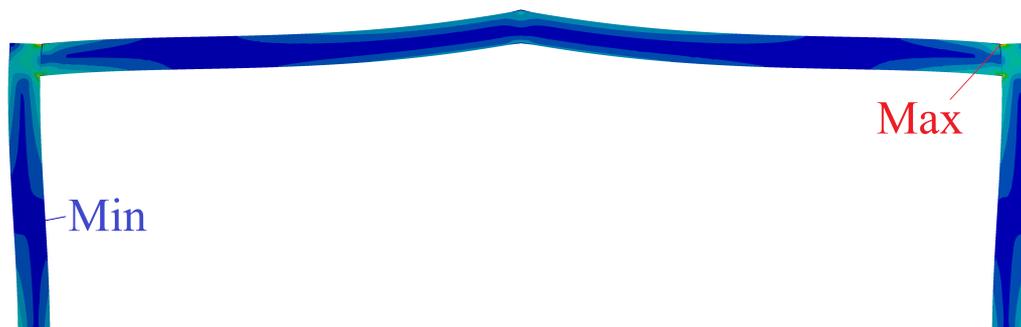


Abb. 3.12: Verteilung der Vergleichsspannung nach von Mises.

Neben der Festigkeitskontrolle muss auch die Stabilität des Modells überprüft werden. Hierfür wird unter Zuhilfenahme der FEM eine Beulanalyse durchgeführt, die als Ergebnis einen Eigenwert ausgibt. Bei einer Beulanalyse können sich mehrere Eigenwerte einstellen, jedoch ist hier der niedrigste positive Wert als aussagekräftig zusehen. Dieser Eigenwert wird auch als ein Lastvielfaches definiert. Dieser Wert gibt das Vielfache der wirkenden Last bzw. Lastkombination an. Liegt der Lastfaktor unter einem Wert von Eins, kann angenommen werden, dass die betrachtende Struktur aufgrund eines Stabilitätsproblems versagen wird. Nimmt dieser Faktor einen Zahlenwert von über Eins ein, kann allgemein angenommen werden, dass die Struktur bei diesen Einwirkungen nicht versagen wird. Beträge über Eins können auch als ein Sicherheitsfaktor gesehen werden. In Abbildung 3.13 wird die sich einstellende Versagenform der betrachteten Rahmenstruktur präsentiert.

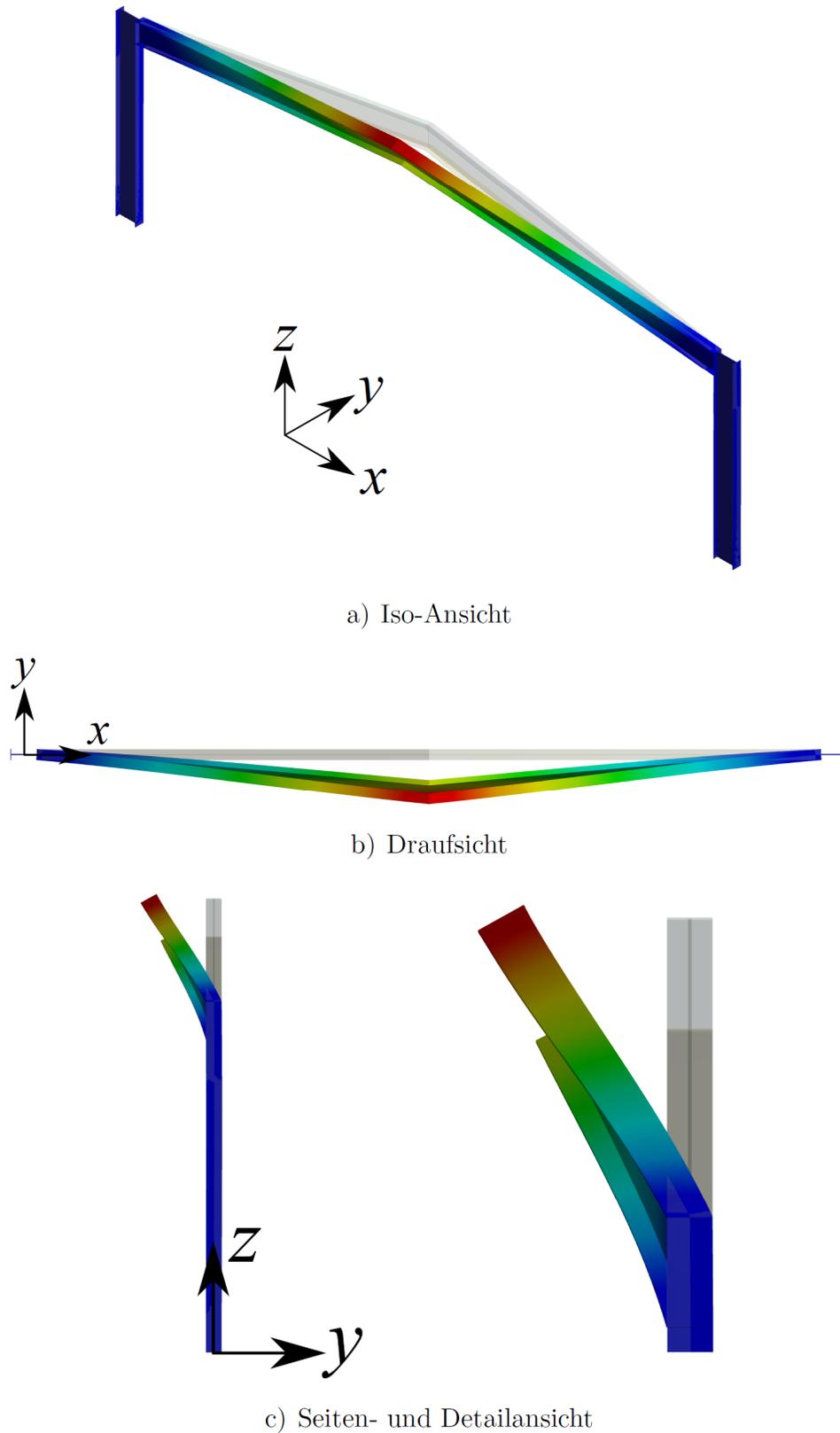


Abb. 3.13: *Stabilitätsmoden eines Stahlrahmens.*

Eine Parameterstudie (Tab. 3.7) ergibt das notwendige Profil, bei dem weder die Grenzspannungen überschritten noch sich Stabilitätsfälle einstellen werden. Es lässt sich feststellen, dass der IPE500 die Festigkeitsüberprüfung und die Stabilitätsuntersuchung bestä-

IPE-Träger	Vergleichsspannung	Lastmultiplikator
	$\sigma_v$ [MPa]	$\lambda$ [-]
IPE200	898	0,149
IPE300	360	0,391
IPE400	179	0,813
IPE500	96,5	1,434
IPE600	56,4	2,492

Tabelle 3.7: Parameterstudie für die Profilauswahl.

tigt. Die Vergleichsspannung ist kleiner als die Grenzspannung und der Lastmultiplikator ist größer als Eins. In Abbildung 3.14 sind die genauen Abmessungen des IPE500 aufgeführt. Hierbei beträgt die Höhe des Profils 500 mm. Die beiden Gurten besitzen eine identische Breite von 200 mm. Die Gurtdicken  $t_g$  sind mit 16 mm festgelegt. Für den Steg kann eine Dicke von  $t_s = 10,2$  mm notiert werden.

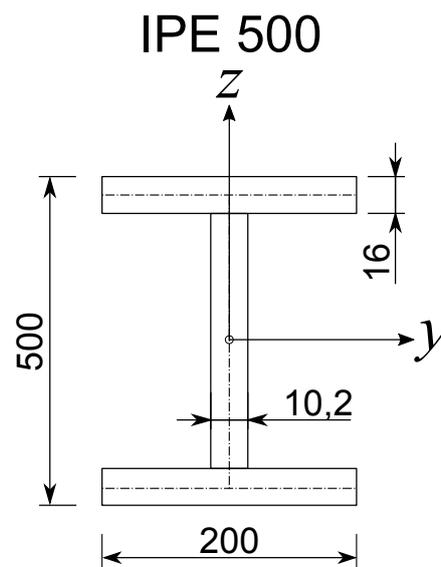


Abb. 3.14: Abmessungen eines IPE500-Profils [102].

### 3.3 Auslegung in Faserverbundbauweise

Der im Abschnitt zuvor ermittelte Träger aus Stahl soll nun für die Auslegung von Tragwerkstrukturen aus Faserverbundwerkstoffen als Ausgangsbasis dienen. Neben der Gesamthöhe des Trägers soll auch die Gesamtbreite des Profils gleich groß bleiben. Der Träger wird insgesamt in drei Segmente aufgeteilt, wobei zwei davon identisch sind. Die einzelnen Segmente verfügen über einen rechteckförmigen Umriss, der mit einer bestimmten Breite und Dicke festgelegt ist. Die Radien vom IPE-Profil nach DIN 1025-5 werden für die Auslegung des Composite-Träger nicht mit berücksichtigt. Die beiden parallel zur  $x$ -Achse liegenden Segmente werden als Gurt bezeichnet. Diese Gurte besitzen eine Breite

$b_g$  und eine Dicke von  $t_g$ . Das vertikale bzw. parallel zur  $z$ -Achse liegende Segment wird als Steg bezeichnet. Die Stegbreite wird mit  $b_s$  beschriftet. Für die Dicke wird die Variable  $t_s$  eingeführt. In der vorliegenden Arbeit sollen lediglich prismatische Träger betrachtet werden. Die Gesamtlänge wird mit  $L$  gekennzeichnet. In Abbildung 3.15 ist ein beispielhafter Composite-Träger mit seinen dazugehörigen Abmessungen dargestellt.

Der wesentliche Unterschied zwischen Faserverbundwerkstoffträgern und Stahlträgern besteht in den Materialeigenschaften. Der Stahlträger verfügt über isotrope Materialeigenschaften und besitzt somit in jeder Richtung die gleichen Attribute. Faserverbundwerkstoffe hingegen sind richtungsabhängig und weisen ein anisotropes Materialverhalten auf.

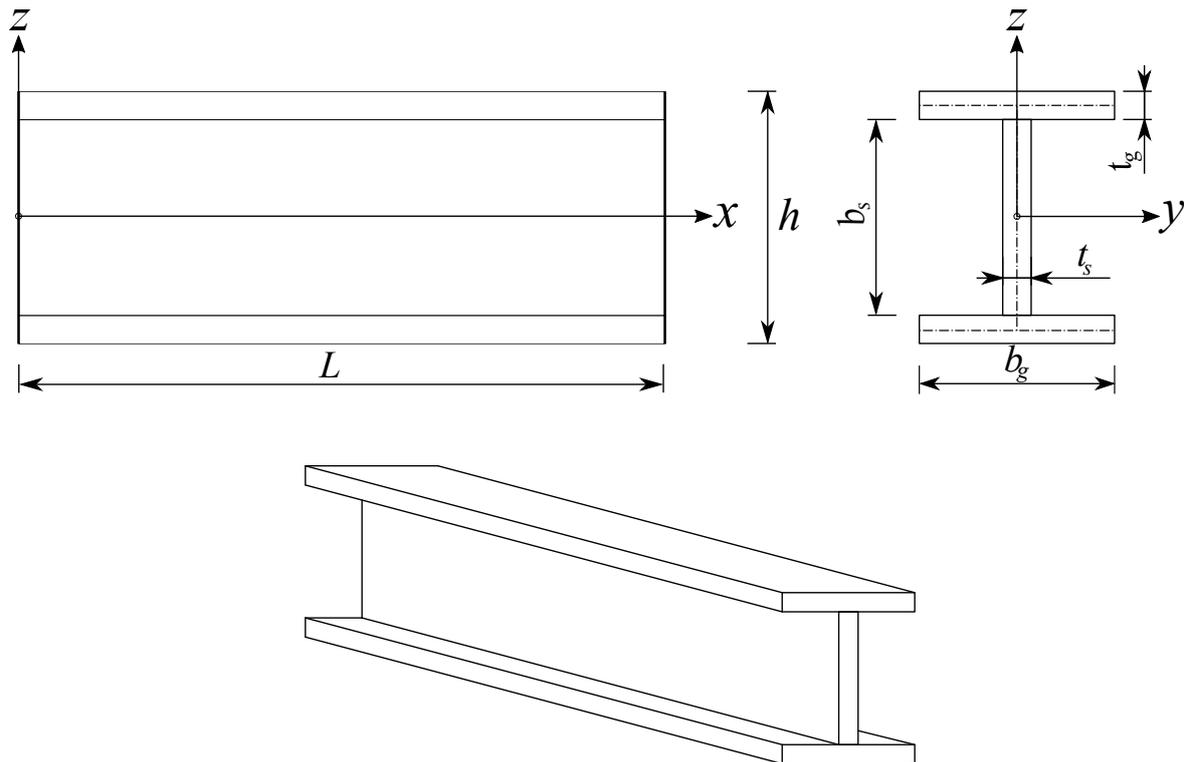


Abb. 3.15: Abmessungen eines Composite-Trägers (oben) und die isometrische Ansicht (unten).

In dieser Arbeit sollen die einzelnen Segmente eines Composite-Trägers aus unidirektionalen Schichten (UD-Schichten) bestehen. Alle Fasern werden lediglich parallel zueinander in die Matrix eingebettet. Ein Segment eines Trägers kann auch als ein Laminat bezeichnet werden, wobei diese aus mehreren aufeinander gestapelten unidirektionalen Einzelschichten mit unterschiedlichen Faserorientierungen bestehen können. Für jedes Laminat können die folgenden Parameter beliebig variiert werden:

- Schichtenanzahl  $n_s$
- Schichtlage
- Dicke  $h_k$  der jeweiligen Einzelschicht
- Orientierungswinkel  $\theta_k$  der jeweiligen Einzelschicht
- Werkstoffkennwerte.

Da jede UD-Schicht eine feste Dicke besitzt, verfügen Laminare über keine beliebige Dicke, weil sie von der Anzahl der Schichten  $n_s$  abhängt. Neben der Schichtanzahl und der Dicke der Lagen sind die Orientierungen der einzelnen UD-Schichten sehr ausschlaggebend für die Steifigkeit des gesamten Trägers. Für eine optimale Steifigkeit der Composite-Balken werden folgende Bedingungen für die Lagenaufbauten des Gurtes bzw. des Steges festgesetzt:

- Gurt
  - ca. 70%  $\implies$   $0^\circ$ -Schichten
  - ca. 15%  $\implies$   $90^\circ$ -Schichten
  - ca. 15%  $\implies$   $\pm 45^\circ$ -Schichten
- Steg
  - ca. 15%  $\implies$   $0^\circ$ -Schichten
  - ca. 15%  $\implies$   $90^\circ$ -Schichten
  - ca. 70%  $\implies$   $\pm 45^\circ$ -Schichten

Die Gurte werden mit hauptsächlich  $0^\circ$ -Lagen versehen, weil diese Elemente bei den betrachteten Einwirkungen wesentlich auf Zug- und Druck belastet werden.

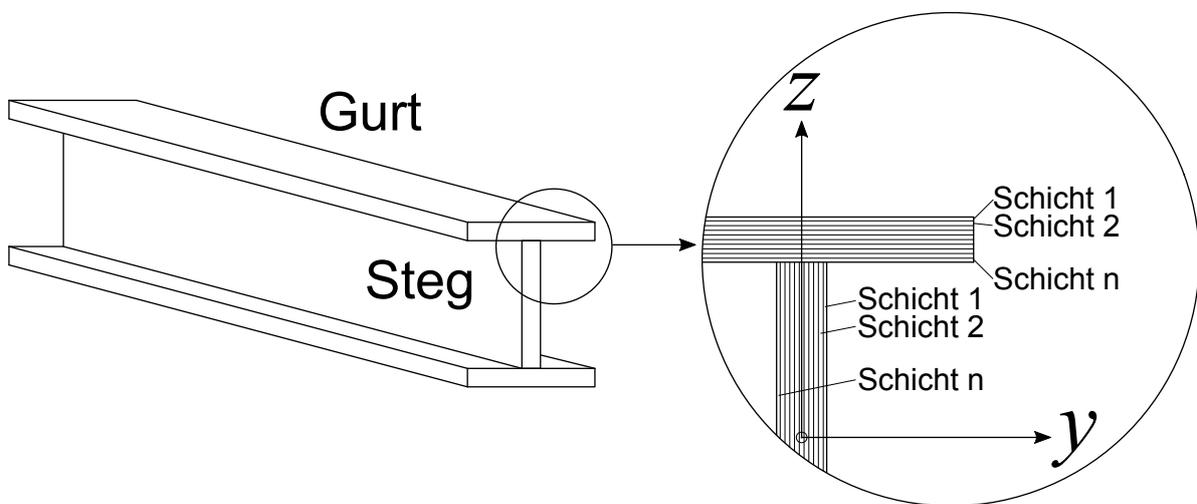


Abb. 3.16: Schichtenanordnung des Gurtes bzw. des Steges.

Damit die Gurte nicht nur in Längsrichtung eine hohe Steifigkeit haben, werden  $90^\circ$ - und  $\pm 45^\circ$ -Schichten als Ausgleich hinzugefügt. Der Steg wird besonders auf Schub belastet und ist gefährdet, lokal auszubeuken. Das Laminat des Steges wird hauptsächlich mit  $\pm 45^\circ$ -Lagen beschichtet, um ein Versagen zu reduzieren. In der Abbildung 3.16 sind die prinzipiellen Anordnungen der Schichten für Gurt und Steg dargestellt.

Der gewählte Lastfall (Eigengewicht + Schneelast), der in Abschnitt 3.2 ermittelt wurde, soll auch für die Untersuchung bzw. Dimensionierung des Composite-Trägers dienen. Die Schneelast für den Standort Hamburg bleibt konstant und ändert sich nicht. Jedoch muss das Eigengewicht für den Composite-Träger Neuberechnet werden, weil nun andere

Materialwerte vorhanden sind. In der vorliegenden Arbeit sollen für die UD-Schichten ein typisches Epoxid-Carbon Prepreg herangezogen werden. Diese UD-Schicht besitzt orthogonal anisotrope Materialeigenschaften. Neben den benötigten Ingenieurgrößen bzw. Materialkennwerten für das betrachtende Epoxid-Carbon Prepreg kann auch die Dichte der UD-Schicht aus der Tabelle 3.8 entnommen werden. Mithilfe dieser Materialkenn-

### Epoxid-Carbon Prepreg

Materialkennwert	Symbol	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul in der $x_1$ -Richtung	$E_{11}$	121000	[MPa]
Elastizitätsmodul in der $x_2$ -Richtung	$E_{22}$	8600	[MPa]
Elastizitätsmodul in der $x_3$ -Richtung	$E_{33}$	8600	[MPa]
Querkontraktionszahl in der $x_1x_2$ -Ebene	$\nu_{12}$	0,27	[–]
Querkontraktionszahl in der $x_2x_3$ -Ebene	$\nu_{23}$	0,4	[–]
Querkontraktionszahl in der $x_1x_3$ -Ebene	$\nu_{13}$	0,27	[–]
Schubmodul in der $x_1x_2$ -Ebene	$G_{12}$	4700	[MPa]
Schubmodul in der $x_2x_3$ -Ebene	$G_{23}$	3100	[MPa]
Schubmodul in der $x_1x_3$ -Ebene	$G_{13}$	4700	[MPa]
Dichte	$\rho$	1490	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Einzelsschichtdicke	$h_k$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	[m]

Tabelle 3.8: Materialkennwerte für ein Epoxid-Carbon Prepreg.

werte und einem FEM-Modell konnten für die Rahmenstruktur einige Composite-Träger ermittelt werden. Wie bereits bei der Stahl Dimensionierung wurde auch hier eine Parameterstudie durchgeführt. Es wurde eine Vielzahl von Berechnungen durchgeführt, um eine bestmögliche Lösung für die Träger zu erhalten. Hierbei wurden die Rahmenstrukturen, die mit Composite-Balken versehen sind, in der FEM-Analyse auf ihre Stabilität überprüft. Zur Ermittlung einer optimalen Lösung müsste ein Optimierungsprogramm angewandt werden, weil ein Composite-Träger von zahlreichen Variablen abhängt, die einen signifikanten Einfluss auf die Stabilität der Gesamtstruktur besitzen.

An dieser Stelle wurde, da es sich hier zunächst um eine Vorauslegung handelt, auf gezielte Optimierungsverfahren verzichtet. Über die Parameterstudie konnten drei Composite-Träger bzw. Laminat-Konfigurationen ermittelt werden, die in Tabelle 3.9 aufgelistet sind. Der erste Träger besitzt die gleichen äußeren Bemaßungen wie der IPE500-Träger. Jedoch unterscheidet sich sowohl die Dicke des Gurtes als auch die Dicke des Steges erheblich von der des Stahlträgers. Die Laminat-Konfiguration A besitzt eine Gurtdicke von  $t_g = 28\text{mm}$  und ist dementsprechend um das 1,75-Fache größer als die Dicke des Trägers aus Stahl. Die Stegdicke des Faserverbundträgers ist im Vergleich zum Stahlbalken doppelt so groß. Da diese Dicken relativ umfangreich ausfallen, wurden zwei weitere Geometrien für einen Composite-Träger dimensioniert. An dieser Stelle wurde sowohl die Gesamthöhe als auch die Gurtbreite vergrößert. Für die zweite Laminat-Konfiguration konnte die Gurtdicke um

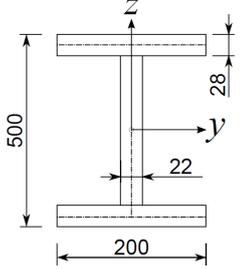
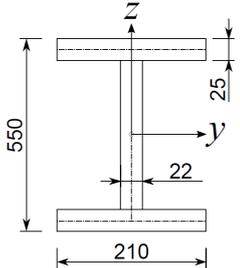
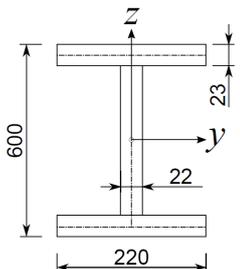
Laminat-Konfiguration	Abmessungen	Lagenaufbau	Schichtanzahl
A		Gurt: $[0_{20}^{\circ} / \pm 45_4^{\circ} / 90_4^{\circ}]_{4S}$	224
		Steg: $[\pm 45_{16}^{\circ} / 90_3^{\circ} / 0_3^{\circ}]_{4S}$	176
B		Gurt: $[0_{17}^{\circ} / \pm 45_4^{\circ} / 90_4^{\circ}]_{4S}$	224
		Steg: $[\pm 45_{16}^{\circ} / 90_3^{\circ} / 0_3^{\circ}]_{4S}$	176
C		Gurt: $[0_{15}^{\circ} / \pm 45_4^{\circ} / 90_4^{\circ}]_{4S}$	224
		Steg: $[\pm 45_{16}^{\circ} / 90_3^{\circ} / 0_3^{\circ}]_{4S}$	176

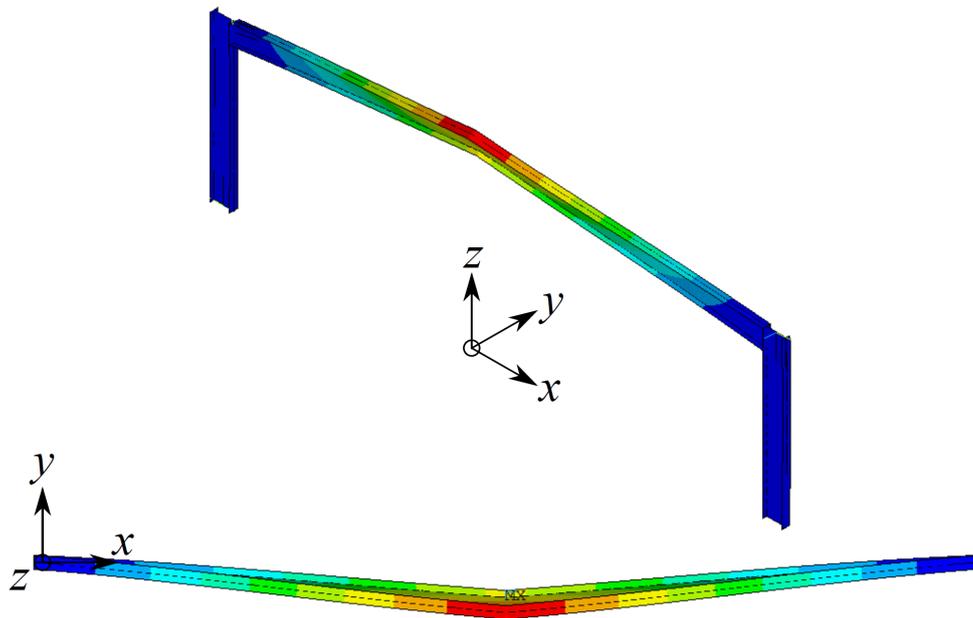
Tabelle 3.9: Ermittelte Laminat-Konfiguration.

3 mm reduziert werden. Die Dicke  $t_g = 23\text{mm}$  konnte bei einem Träger mit einer Höhe von 600mm und einer Breite von 220mm ermittelt werden.

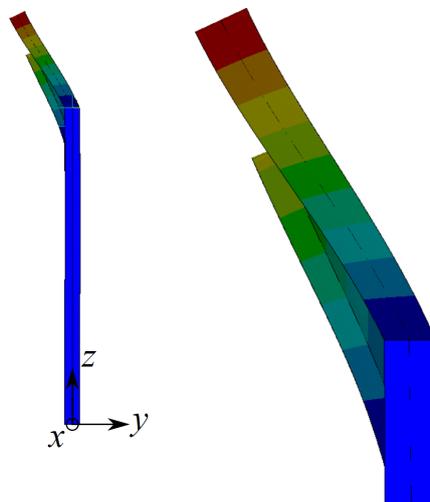
Anhand der Ergebnisse aus Tabelle 3.9 wird ersichtlich, dass die Stegdicke bei allen drei Konfigurationen die gleiche Dimension besitzt. Eine Erklärung hierfür liegt darin, dass die Stegdicke einen signifikanten Einfluss auf den Lastmultiplikator der Stabilitätsanalyse hat. Bei einer reduzierten Dicke des Steges kann kein Lastfaktor über Eins gefunden werden. Aus diesem Grund wird die Stegdicke für alle drei Lamine konstant gehalten.

Aus der Stabilitätsanalyse, die im FEM-Programm ANSYS durchgeführt wurde, konnten sowohl die Eigenformen als auch die Eigenwerte der Rahmenstruktur für alle drei Laminat-Konfigurationen analysiert werden. In Abbildung 3.17 ist die erste Eigenform des Hallenrahmens mit der Laminat-Konfiguration B wiedergegeben. Die bei diesem Lastfall sich einstellende Knickform zeigt ein klassisches Biegedrillknickversagen der Hallenrahmenstruktur. Hierbei knicken die beiden Riegel am Anschlusspunkt seitlich aus und erzeugen eine Verdrehung um die Schwerpunktsachse des jeweiligen Balkens. Dieses Knickphänomen bzw. diese Knickform tritt bei allen untersuchten Konfigurationen auf, wobei sich

die Eigenwerte voneinander unterscheiden. Anhand von Abbildung 3.17 kann festgestellt werden, dass die beiden Stiele bei der Stabilitätsuntersuchung nicht als erstes versagen würden. Bevor der Rahmen auf Stabilität überprüft werden kann, wird eine Strukturanalyse



a) Iso- und Draufsicht



b) Seiten- und Detailansicht

Abb. 3.17: Erste Eigenform der Rahmenstruktur mit der Laminat-Konfiguration B.

lyse durchgeführt, um die Verschiebungen der Rahmenstruktur darstellen zu können. In Abbildung 3.18 ist die Gesamtdeformation aus der FEM-Analyse der analysierten Struktur präsentiert.

Aufgrund der symmetrischen Einwirkung auf die Rahmenstruktur entstehen demzufolge auch symmetrische Verformungen. Die maximale Verschiebung tritt bei allen drei Laminat-Konfigurationen im Anschlusspunkt zwischen den beiden Riegeln auf.

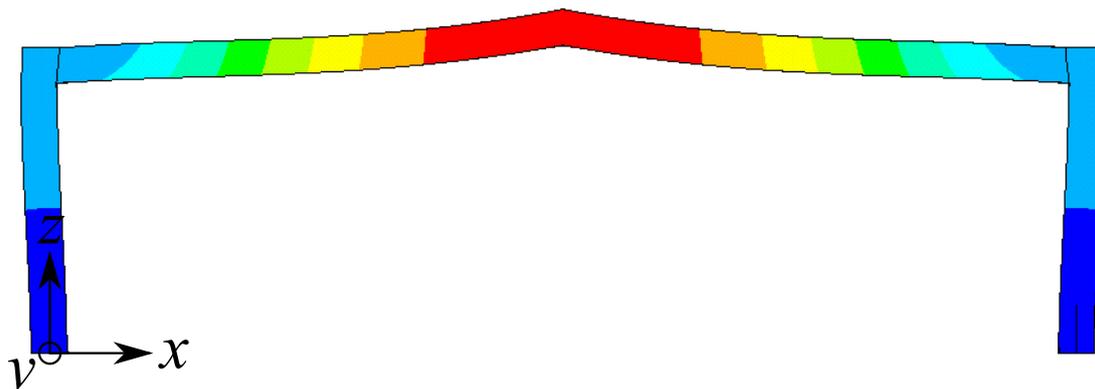


Abb. 3.18: Gesamtverschiebung der Rahmenstruktur mit der Laminat-Konfiguration B.

Der obere Bereich der Stiele weicht leicht zur Seite aus, wobei die Verschiebung entlang des Stiels bis zur Einspannung gegen Null verläuft. Der Wert für die maximale Verschiebung liegt für die drei Laminat-Konfigurationen zwischen 10 mm und 16 mm.

Neben der Struktur- und Stabilitätsanalyse wurde für die Composite-Rahmen eine Festigkeitskontrolle durchgeführt. Um richtungsabhängige Materialfestigkeiten zu berücksichtigen, wurde das nicht differenzierende Versagenskriterium nach Tsai-Wu (s. z.B. [100]) gewählt. Dieses Pauschalkriterium gilt für Faserverbundwerkstoff und bezieht sich auf den ebenen Spannungszustand. Generell gibt ein Versagenskriterium an, ob eine Struktur unter

### Epoxid-Carbon Prepreg

Festigkeitsparameter	Symbol	Wert	Einheit
Zugfestigkeit in der $x$ -Richtung	$X_t$	2231	[MPa]
Zugfestigkeit in der $y$ -Richtung	$Y_t$	29	[MPa]
Druckfestigkeit in der $x$ -Richtung	$X_c$	-1082	[MPa]
Druckfestigkeit in der $y$ -Richtung	$Y_c$	-100	[MPa]
Schubfestigkeit in der $xy$ -Ebene	$S_{xy}$	60	[MPa]
Kopplungskonstante für die $xy$ -Ebene	$K_{xy}$	-1	[—]

Tabelle 3.10: Festigkeitsparameter für ein Epoxid-Carbon Prepreg.

bestimmten Bedingungen und Einwirkungen versagen wird. Hierfür wird ein sogenannter Index  $I_F$  eingeführt, der angibt, ob die Struktur bei den ermittelten Lasten versagt oder nicht. Im Allgemeinen wird dieser Versagensindex wie folgt berechnet:

$$I_F = \frac{\text{Spannung}}{\text{Festigkeit}}. \quad (3.16)$$

Die Struktur versagt, wenn  $I_F \geq 1$  ist. Die Inverse des Versagensindex  $I_F$  wird als Sicherheitsfaktor bezeichnet und folgendermaßen beschrieben:

$$S_F = \frac{1}{I_F} = \frac{\text{Festigkeit}}{\text{Spannung}}. \quad (3.17)$$

Erhält man für den Sicherheitsfaktor  $S_F$  einen Wert unter Eins, bedeutet dies für die Struktur, dass sie versagen wird. Für richtungsabhängige Materialfestigkeiten können folgende ausgewählte Versagenskriterien unterschieden werden, wobei sie in zwei Kategorien aufgeteilt werden können:

- Pauschalkriterien
  - Maximalspannungskriterium
  - Maximaldehnungskriterium
  - Tsai-Wu-Kriterium
- Differenzierende Kriterien
  - Puck-Kriterium
  - Hashin-Kriterium

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Kategorien liegt darin, dass die Pauschalkriterien nur zwischen Versagen oder Nichtversagen unterscheiden können. Differenzierende Kriterien hingegen können eine Aussage über die Bruchart treffen. Sie unterscheiden zwischen Faserbruch und Zwischenfaserbruch und können eine Vorhersage zum Bruchmodus geben.

In dieser Arbeit sollen die Hallenrahmen mithilfe des Tsai-Wu-Kriteriums auf ein Versagen untersucht werden. Hierbei ändert sich die Notation sowohl für den Versagensindex  $I_F$  als auch für den Sicherheitsfaktor  $S_F$  wie folgt:

	Allgemein	→	Tsai-Wu
<b>Versagensindex</b>	$I_F$	→	$I_{TW}$
<b>Sicherheitsfaktor</b>	$S_F$	→	$S_{TW}$

Der Tsai-Wu-Index kann mit einem ebenen Spannungszustand wie folgt berechnet werden [105]:

$$I_{TW} = \frac{1}{S_{TW}} = \left[ -\frac{I_{tw,2}}{2I_{tw,1}} + \sqrt{\left(\frac{I_{tw,2}}{2I_{tw,1}}\right)^2 + \frac{1}{I_{tw,1}}} \right]^{-1}, \quad (3.18)$$

wobei für  $I_{tw,1}$  Folgendes gilt:

$$I_{tw,1} = \frac{\sigma_{11}^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S_{xy}^2} + K_{xy} \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} \quad (3.19)$$

und für  $I_{tw,2}$

$$I_{tw,2} = \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_{22} \quad (3.20)$$

geschrieben werden kann. Dieser Index muss für jede Einzelschicht der Laminat-Konfiguration analysiert und ausgewertet werden. Hierzu wird wieder die Finte-Elemente-Methode herangezogen, um den Tsai-Wu-Index für alle Schichten der Struktur zu berechnen. Leider kann das Tsai-Wu-Kriterium keine Informationen zum Bruchmodus geben, weil es nicht zwischen Faserbruch oder Zwischenfaserbruch unterscheiden kann. Des Weiteren kann keine Auskunft gegeben werden, ob die Struktur durch Druck- bzw. Zugbeanspruchung versagt. In der Tabelle 3.10 sind die Materialwerte bzw. Koeffizienten (ANSYS 16.2, Material Library) für die Versagensanalyse nach Tsai-Wu aufgelistet.

Die maximalen Verschiebungen und die ersten positiven Eigenwerte bzw. Lastmultiplikatoren für alle ermittelten Laminat-Konfigurationen, die aus der FEM-Berechnung analysiert wurden, sind in Tabelle 3.11 angegeben. Außerdem ist in der letzten Spalte der größte auftretende Tsai-Wu-Index hinterlegt. Anhand von Tabelle 3.11 zeigt sich, dass die

Laminat-Konfiguration	max. Verschiebung	Lastmultiplikator	Tsai-Wu Index	
	$w_{max}$ [mm]	$\lambda$ [-]	$I_{TW}$ [-]	$S_{TW}$ [-]
A	15,7	1,043	0,260	3,85
B	12,9	1,042	0,213	4,69
C	10,7	1,025	0,178	5,62

Tabelle 3.11: Ergebnisse aus der FEM-Berechnung.

Rahmenstruktur mit der Laminat-Konfiguration A die größte Verschiebung von 15,7mm aufweist. Des Weiteren liegen bei allen betrachteten Hallenrahmen die Eigenwerte über Eins, d.h., dass sie die Stabilitätsanalyse überstanden haben. Auch die Versagenshypothese nach Tsai-Wu wird von allen Strukturen erfüllt, weil der Tsai-Wu-Index  $I_{TW}$  für alle Einzelschichten unter dem Wert Eins liegt. In dieser Arbeit werden die Lamine aus Tabelle 3.11 im Folgenden als Basis für alle weiteren Analysen verwendet.

### 3.4 FEM-Modelle der Rahmenstruktur

In diesem Abschnitt sollen die verwendeten FEM-Modelle der Rahmenstrukturen vorgestellt werden. Für die Rahmenstruktur aus Stahl wurde ein Modell aus Beam-Elementen erstellt. Die Geometrien des Rahmens können aus der Abbildung 3.2 entnommen werden. Zwischen den gezeigten Referenzpunkten werden Linien erzeugt. Diese Linien gelten als Schwerpunktachse für die Balken der Rahmenstruktur. Insgesamt werden vier Linien

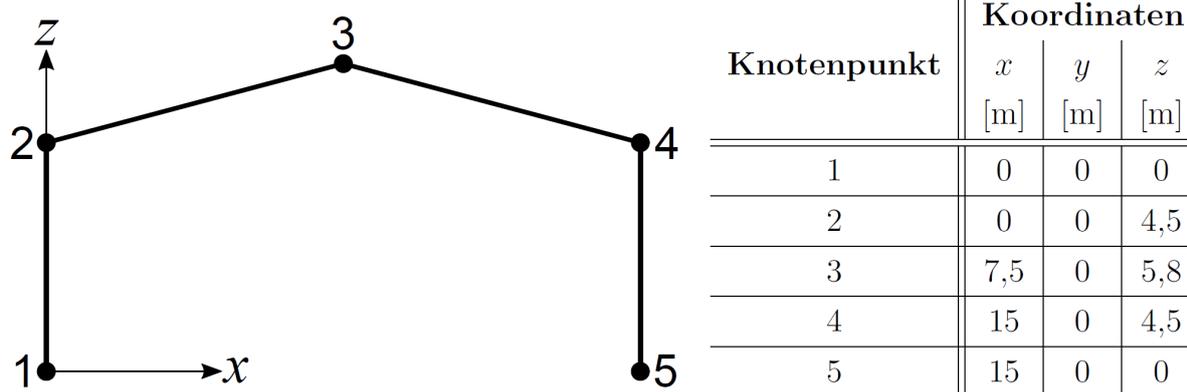


Abbildung 3.19: Koordinatenwerte für die Rahmenstruktur.

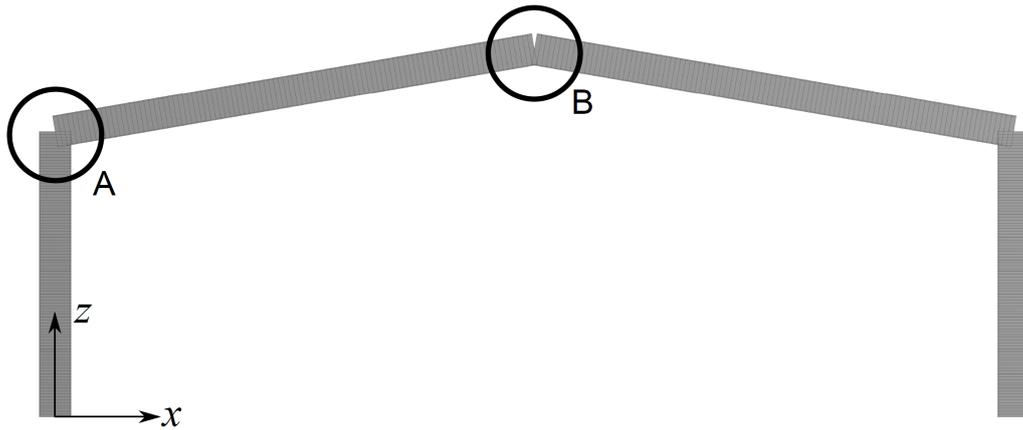
Abb. 3.19: *Koordinatenwerte für die Rahmenstruktur.*

benötigt, weil die Rahmenstruktur aus vier Balken besteht. Im nächsten müssen die Abmessungen des ausgewählten Querschnitts eingegeben werden, um sie auf die Linien zuweisen zu können. Für die Vernetzung werden Beam188-Elemente verwendet. Für den gewählten Elemententyp aus der ANSYS Library gelten folgende allgemeine Informationen [106]:

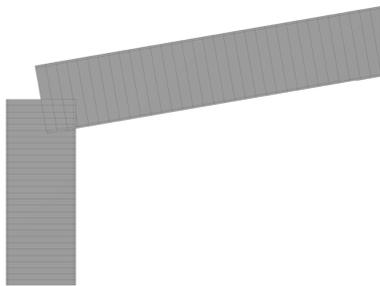
- Das Beam188 ist ein lineares 2-Knoten-Balkenelement und besitzt in beiden Knoten sechs Freiheitsgrade.
- Die Knoten beinhalten die translatorischen Freiheitsgrade in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinaten. Des Weiteren werden die Rotationen um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse berücksichtigt.
- Die Beam188-Elemente sind für die Analyse von linearen Struktur- und Stabilitätsproblemen geeignet.
- Sie können für beliebige Querschnittsformen verwendet werden.
- Die Balkenelemente basieren auf der Timoshenko-Balkentheorie. Dementsprechend werden die Schubdeformationen erster Ordnung ebenfalls berücksichtigt.

Aus der Abbildung 3.20 lässt sich entnehmen, dass die Verbindungspunkte zwischen Stiel und Riegel bzw. zwischen den beiden Riegeln nicht der Realität entsprechen, weil sich die Querschnitte der jeweiligen Balken überschneiden. Leider gibt es bei einer Balkenkonstruktion keine weitere Möglichkeit für eine Verbindung. In dieser Arbeit wird das Balkenmodell hauptsächlich dafür verwendet, die Schnittgrößen der Rahmenstruktur numerisch zu bestimmen. Die Schnittgrößen der untersuchten Strukturen sind in Abschnitt 3.2 beschrieben worden.

Um eine realitätsnahe Konstruktion der Rahmenstruktur zu generieren, wurde ein weiteres Modell des Hallenrahmens erstellt. Hierbei werden nun zweidimensionale Elemente für die Konstruktion verwendet, siehe Abbildung 3.20, unten. Mithilfe dieser Elemente kann eine eindeutig bessere Verbindungen zwischen den Stielen und Riegeln hergestellt werden. Zusätzlich kann die Anbringung der Randbedingungen und Einwirkungen besser gestaltet werden.



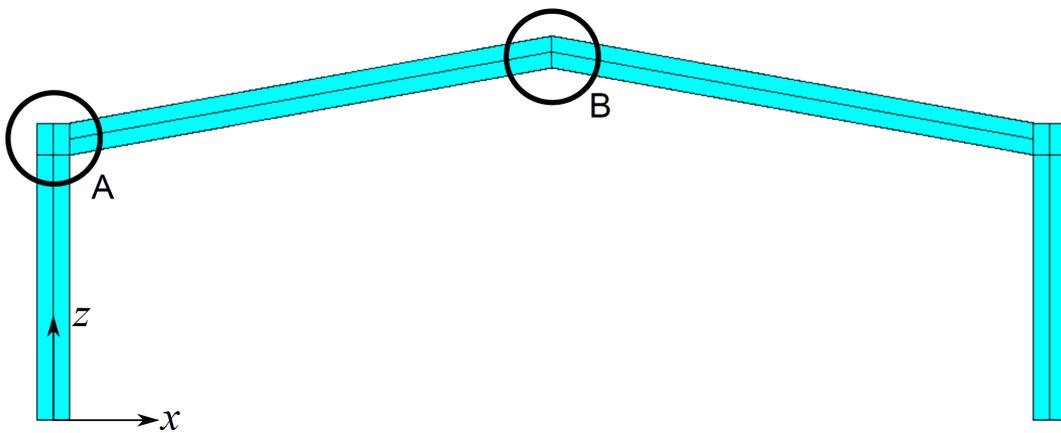
a) Vorderansicht Beam-Modell



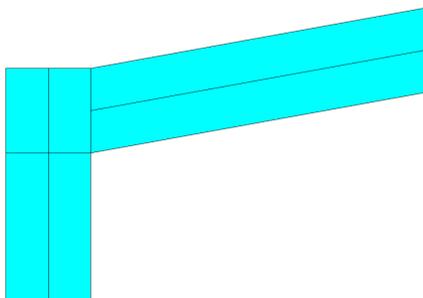
b) Detailansicht A vom Beam-Modell



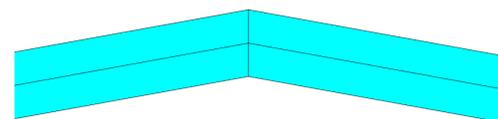
c) Detailansicht B vom Beam-Modell



d) Vorderansicht vom Shell-Modell



e) Detailansicht A vom Shell-Modell



f) Detailansicht B vom Shell-Modell

Abb. 3.20: *Beam- und Shell-Modelle der Rahmenstruktur.*

# Kapitel 4

## Effektive Steifigkeiten von Faserverbundträgern

### 4.1 Effektive Steifigkeiten von Composite-Balken

Die Theorie für offene und geschlossene isotrope dünnwandige Balken mit axialen Belastungen wurde vor Jahrzehnten von Vlasov [107] entwickelt. Diese Theorie wird auch von Megson [108] präsentiert. Diese Theorie bildet die Grundlage für die Werke von Barbero [109] und wird von Bank/Bednarczyk [110] und für orthotrope Composite erweitert. Hierbei ist der Balken nur orthotrop, wenn sowohl die axiale Belastung als auch eine Biegung keine Verdrehung des Balkens hervorrufen. Für orthotrope Balken, die aus unidirektionalen Schichten bestehen, spielen Schubdeformationen eine wichtige Rolle, dies wird in den Veröffentlichungen von Massa und Barbero [111] sowie von Bank [112], [113] dargestellt. Für nicht orthotrope Balken, wo sowohl eine axiale Belastung als auch eine reine Biegung eine Verdrehung des Balkens hervorrufen kann, gibt es zahlreiche Autoren, die die Theorie des nicht orthotropen Balkens erweitert haben. Hierbei gibt es von den jeweiligen Verfassern unterschiedliche Lösungswege. Die Theorie von Vlasov für dünnwandige Balken mit offenen Querschnitten wurde von Bauld and Tzeng [114] für nicht orthotrope Balken mit symmetrischem Lagenaufbau erweitert, hierbei wurde folgende konstitutive Gleichung abgeleitet:

$$\begin{pmatrix} \widehat{N}_x \\ \widehat{M}_y \\ \widehat{M}_z \\ \widehat{T}_{sv} \\ \widehat{M}_\omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} & \bar{P}_{13} & 0 & \bar{P}_{15} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} & \bar{P}_{23} & \bar{P}_{24} & \bar{P}_{25} \\ \bar{P}_{31} & \bar{P}_{32} & \bar{P}_{33} & \bar{P}_{34} & \bar{P}_{35} \\ 0 & \bar{P}_{42} & \bar{P}_{43} & \bar{P}_{44} & \bar{P}_{45} \\ \bar{P}_{51} & \bar{P}_{52} & \bar{P}_{53} & \bar{P}_{54} & \bar{P}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \frac{1}{\rho_y} \\ \frac{1}{\rho_z} \\ \vartheta \\ \bar{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

wobei im linken Vektor  $\widehat{N}_x$  die Normalkraft ist,  $\widehat{M}_y$  und  $\widehat{M}_z$  sind die Biegemomente um die  $y$ - und  $z$ -Achse.  $\widehat{T}_{sv}$  ist das Saint-Venantsche Torsionsmoment, und  $\widehat{M}_\omega$  ist das Wölbmoment. Im rechten Vektor befinden sich zum einen die Dehnung in  $x$ -Richtung  $\varepsilon_x^0$  und zum anderen die Radien der Krümmungen der  $x$ -Achse, die sowohl um die  $y$ -Achse als auch um die  $z$ -Achse verlaufen, sprich  $\frac{1}{\rho_y}$  und  $\frac{1}{\rho_z}$ . Des Weiteren befindet sich die Verdrillung  $\vartheta$  im rechten Vektor. Die Verdrillung ist die erste Ableitung der Verdrehung  $\bar{\psi}$  und die zweite Ableitung der Verdrehung wird mit  $\bar{\Gamma}$  gekennzeichnet. Die 5x5-Matrix  $\underline{\bar{P}}$  bildet die

Steifigkeitsmatrix. Die Gesamttorsion besteht aus der Summe der Saint-Venant-Torsion und der Wölbkrafttorsion:

$$\widehat{T} = \widehat{T}_{sv} + \frac{d\widehat{M}_\omega}{dx}, \quad (4.2)$$

wobei die transversale Schubdeformation nicht berücksichtigt wird. Mit dieser Lösung können nur dünnwandige Composite-Balken berechnet werden, wobei alle Segmente des Balkenquerschnitts einen symmetrischen Lagenaufbau besitzen müssen. Aus diesem Grund werden die Elemente  $\bar{P}_{14}, \bar{P}_{41}$  in der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\bar{P}}$  gleich Null gesetzt. Die von Bauld and Tzeng hergeleitete Theorie wurde von Kobelev und Larichev [115] weiterentwickelt. Hier werden nun auch die transversalen Schubdeformationen berücksichtigt.

Im Werk von Mansfield und Sobey [116] wurde die Theorie von dünnwandigen Composite-Balken mit beliebigen Lagenaufbauten hergeleitet, wobei sie die transversale Schubdeformation und die Wölbkrafttorsion nicht berücksichtigen. Somit kann die Gleichung (4.1) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{sv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} & \bar{P}_{13} & \bar{P}_{14} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} & \bar{P}_{23} & \bar{P}_{24} \\ \bar{P}_{31} & \bar{P}_{32} & \bar{P}_{33} & \bar{P}_{34} \\ \bar{P}_{41} & \bar{P}_{42} & \bar{P}_{43} & \bar{P}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Auch Wu und Sun [117] haben eine allgemeine Theorie für dünnwandige Composite-Balken mit beliebigen Lagenaufbauten hergeleitet, die jedoch hier nicht näher besprochen werden.

In dieser Arbeit soll die Steifigkeitsmatrix von dünnwandigen Composite-Balken, die sowohl ein offenen als auch einen geschlossenen Balkenquerschnitt besitzen, hergeleitet und dargestellt werden. Hierfür wird die Gleichung (4.3) als Grundlage dienen. Alle Balkensegmente können einen beliebigen Lagenaufbau besitzen, wobei auch die lokalen Biegesteifigkeiten berücksichtigt werden. Die transversalen Schubdeformationen und die Wölbkrafttorsion werden nicht berücksichtigt.

Es werden dünnwandige offene und geschlossene Balken betrachtet, die eine prismatische Form besitzen. Die Einzelsegmente eines Balkens können aus einer Einzelschicht oder aus mehreren Schichten bestehen, wobei jede Schicht aus Verbundwerkstoffen bestehen kann. Die analysierten Balkensegmente bestehen aus dünnwandigen Rechtecken (Segmenten), die mit dem Index  $k$  gekennzeichnet werden ( $k = 1, 2, \dots, K$ , wobei  $K$  die Gesamtzahl des Segments darstellt). Die Querschnitte des Balkens können symmetrisch oder unsymmetrisch sein und jedes Balkensegment kann einen beliebigen Lagenaufbau besitzen.

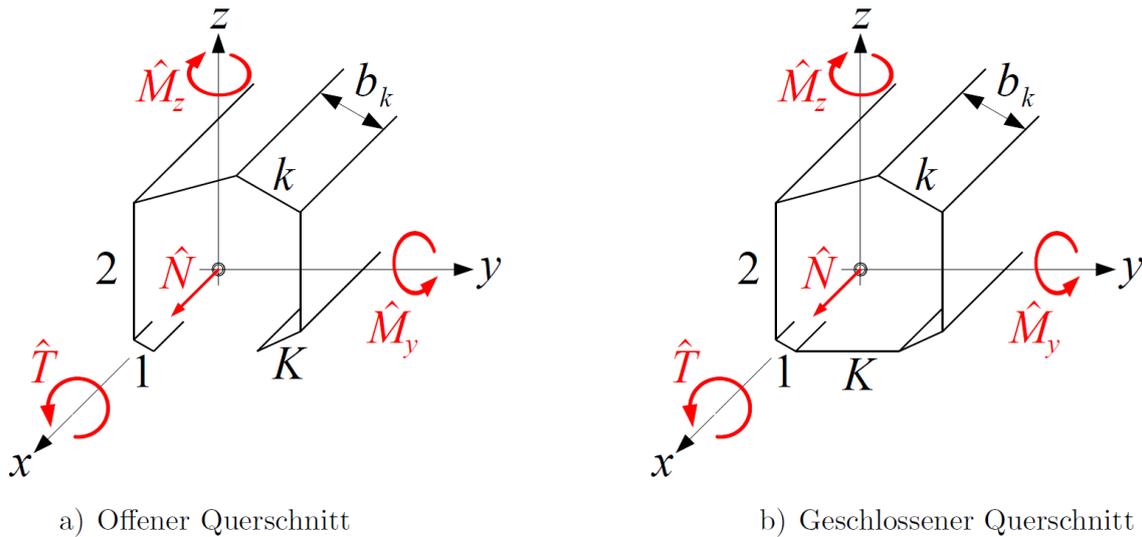


Abb. 4.1: Belastungen in einem offenen (links) und geschlossenen (rechts) Querschnitt eines dünnwandigen Composite-Balkens.

Der Balken wird mit folgenden Kräften bzw. Momenten belastet:

- axiale Normalkraft  $\hat{N}$ ,
- Biegemoment um die  $y$ -Achse  $\hat{M}_y$ ,
- Biegemoment um die  $z$ -Achse  $\hat{M}_z$  und
- Torsionsmoment  $\hat{T}$ ,

die sich auf den Schwerpunkt beziehen. Der Schwerpunkt ist so definiert, dass die axiale Normalkraft  $\hat{N}$  keine Krümmung der  $x$ -Achse erzeugen kann. In der Abbildung 4.2 sind die verwendeten Koordinatensysteme dargestellt. Für den Balken wird zum einen das kartesische  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem verwendet, wobei der Ursprung im Schwerpunkt des Balkens liegt. Zum anderen wird das kartesische Koordinatensystem  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$  verwendet, das einen beliebigen Punkt für den Ursprung besitzt. Für das  $k$ -te Segment wird ein  $\xi_k$ - $\eta_k$ - $\zeta_k$ -Koordinatensystem verwendet. Hier ist der Ursprung der Schwerpunkt des jeweiligen  $k$ -ten Segments. Die  $\xi$ -Achse verläuft parallel zur  $x$ -Achse, die  $\eta$ -Achse verläuft entlang des Umfangs des jeweiligen Balkensegments, und die  $\zeta$ -Achse liegt rechtwinklig zu den beiden anderen Achsen.

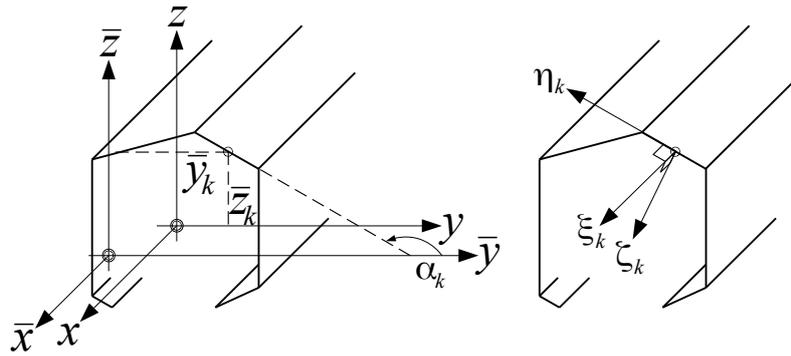


Abb. 4.2: Darstellung des verwendeten Koordinatensystems für die Herleitung von dünnwandigen Composite-Balken mit beliebigen Lagenaufbauten.

Die Weggrößen bezüglich der Längsachse sind  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $\psi$  (siehe Abbildung 4.3). Hierbei ist  $u$  die Längsverschiebung,  $v$  und  $w$  sind die Querverschiebungen in die  $y$ - und  $z$ -Achse und  $\psi$  ist die Verdrehung des Balkenquerschnitts.

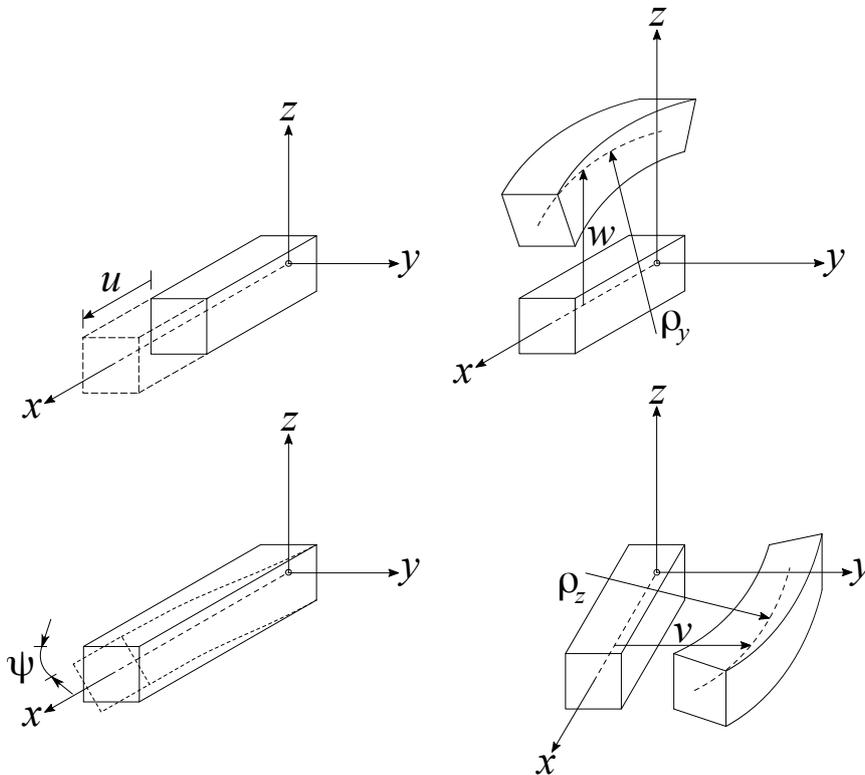


Abb. 4.3: Verformungen des Composite-Balkens.

Die Beziehung zwischen den Verschiebungen und der Dehnung  $\varepsilon_x^0$ , der Krümmungen der  $x$ -Achse  $\frac{1}{\rho_y}$ ,  $\frac{1}{\rho_z}$  und der Verdrehung  $\vartheta$  ist wie folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_z} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \vartheta. \quad (4.4)$$

Für das  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem nehmen diese Beziehungen die folgende Form an:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon_{\bar{x}}^0 \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = \bar{\vartheta}. \quad (4.5)$$

Dabei sind  $\varepsilon_x^0$  die Längsdehnung,  $\frac{1}{\rho_{\bar{y}}}$  und  $\frac{1}{\rho_{\bar{z}}}$  die Krümmungen sowie  $\bar{\vartheta}$  die Verdrillung der Längsachse ( $\bar{x}$ ) des  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystems. Die Größen  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  und  $\bar{\psi}$  sind die Verschiebungen der  $\bar{x}$ -Achse.

### 4.1.1 Offener Balkenquerschnitt

Für die Analyse von dünnwandigen offenen Balken werden vier Schritte durchgeführt:

1. Die Dehnungen in jedem Balkensegment stehen mit der Längsdehnung, den Krümmungen und Verdrillung der  $x$ -Achse des Balkens im Zusammenhang.
2. Die Belastungen in jedem Balkensegment werden über die Dehnungen des jeweiligen Balkensegments ermittelt.
3. Die resultierenden Kräfte, Momente und die Torsion, die sich zusammen auf die  $x$ -Achse des Balkens beziehen, werden über die Belastungen zu jedem Balkensegment ermittelt.
4. Die Steifigkeitsmatrix wird mithilfe der resultierenden Kräfte, Momente und der Torsion, die sich zusammen auf die  $x$ -Achse des Balkens beziehen, und mit der Längsdehnung, den Krümmungen und der Verdrillung der  $x$ -Achse ermittelt.

#### Schritt 1: Verzerrungen im Balkensegment

An einem beliebigen Punkt auf der Bezugsebene des jeweiligen Balkensegments wird die axiale Dehnung mithilfe des ebenen Verzerrungszustands wie folgt berechnet:

$$\varepsilon_{\xi k}^0 = \varepsilon_{\bar{x}}^0 + \bar{z} \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} + \bar{y} \frac{1}{\rho_{\bar{y}}}, \quad (4.6)$$

wobei  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  die Koordinaten eines beliebigen Punkts auf der Bezugsebene des jeweiligen Balkensegments sind und  $\varepsilon_{\xi k}^0$  die Längsdrehung an dieser Stelle. Die Dehnung, die Krümmungen und die Verdrillung der Achse eines  $k$ -ten Balkensegments kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \bar{z}_k & \bar{y}_k & 0 \\ 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & 0 \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{R_k}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \bar{\vartheta} \end{Bmatrix}, \quad (4.7)$$

wobei  $\bar{y}_k$  und  $\bar{z}_k$  die Koordinaten zum Ursprung des  $\xi_k$ - $\eta_k$ - $\zeta_k$ -Koordinatensystems darstellen. Dieser Ursprung ist zugleich die Mitte bzw. der Schwerpunkt des  $k$ -ten Balkensegments. Hierbei beschreibt  $\alpha_k$  den Winkel zwischen der  $\eta_k$ -Achse und der  $\bar{y}$ -Achse. Der hochgestellte Index  $w$  bezieht sich auf das Balkensegment der Längsachse, die durch den Mittelpunkt der Referenzebene verläuft ( $\eta = 0$ ,  $\zeta = 0$ ). Die erste Zeile dieser Gleichung wird durch die Gleichung 4.6 beschrieben.  $\kappa_{\xi k}^w$  und  $\kappa_{mk}^w$  sind die Krümmungen der Achse des  $k$ -ten Balkensegments, die sich in der Ebene  $\xi - \zeta$  bzw. der Ebene  $\eta - \zeta$  befinden (siehe Abbildung 4.4).

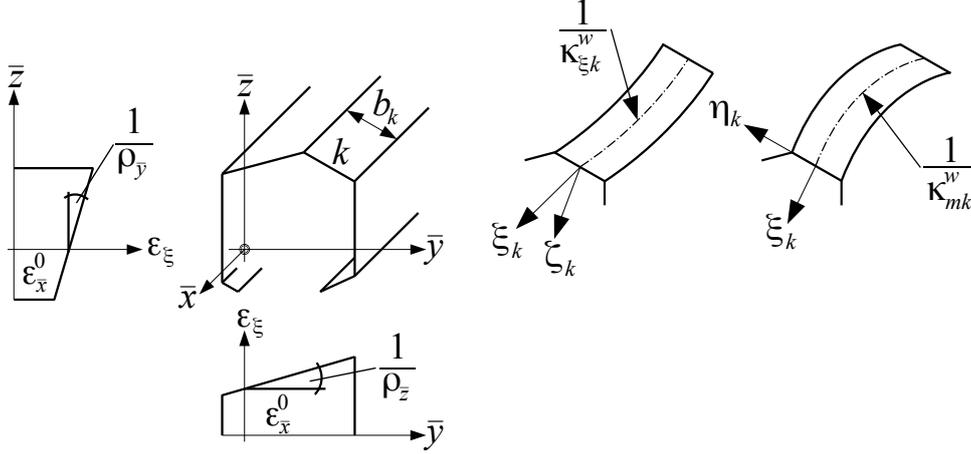


Abb. 4.4: Deformationen eines dünnwandigen offenen Composite-Balkens.

Anhand der letzten Zeile der Gleichung 4.7 kann festgestellt werden, dass die Verdrillung an einem beliebigen Punkt eines Balkensegments der Verdrillung des kompletten Balkens entspricht ( $\vartheta_k^w = \bar{\vartheta}$ ). Die Längsdehnung eines  $k$ -ten Balkensegments ist linear abhängig von  $\eta$  und kann wie folgt dargestellt werden:

$$\varepsilon_{\xi k}^0 = \varepsilon_k^w + \eta \kappa_{mk}^w \quad (4.8)$$

Die Krümmung  $\kappa_{\xi k}$  ist in jedem Segment einheitlich und wird wie folgt berechnet:

$$\kappa_{\xi k} = \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \cos \alpha_k - \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \sin \alpha_k \quad (4.9)$$

Für die Verdrillung kann folgende Gleichung verwendet werden:

$$\vartheta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial w^0}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}. \quad (4.10)$$

Setzt man für die Krümmung  $\kappa_{\xi k}$  den folgenden Ausdruck ein,

$$\kappa_{\xi k} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.11)$$

kann die Gleichung 4.10 folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \kappa_{\xi k}. \quad (4.12)$$

Des Weiteren gilt  $\kappa_{\xi k} = \kappa_{\xi k}^w$  und  $\kappa_{\xi \eta k} = -2\vartheta_k^w = -\bar{\vartheta}$ . Kombiniert man alle diese Beziehungen mit der Gleichung 4.8 kann folgende Matrix erstellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi k}^0 \\ \kappa_{\xi k} \\ \kappa_{\xi \eta k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi}^0 \\ \kappa_{\xi} \\ \kappa_{\xi \eta} \end{Bmatrix}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{R_{\eta}}}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

## Schritt 2: Kräfte und Momente im Balkensegment

Für jedes Balkensegment bzw. Laminatsegment sieht die Konstitutivbeziehung wie folgt aus:

$$\begin{Bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_{\xi\eta} \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi^0 \\ \varepsilon_\eta^0 \\ \gamma_{\xi\eta}^0 \\ \kappa_\xi \\ \kappa_\eta \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k. \quad (4.14)$$

Umgeformt nach den Verzerrungen und Krümmungen entsteht folgende Beziehung:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi^0 \\ \varepsilon_\eta^0 \\ \gamma_{\xi\eta}^0 \\ \kappa_\xi \\ \kappa_\eta \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{61} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{62} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} N_\xi \\ N_\eta \\ N_{\xi\eta} \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k, \quad (4.15)$$

wobei die  $\underline{\underline{\alpha}}$ ,  $\underline{\underline{\beta}}$ ,  $\underline{\underline{\delta}}$ -Matrizen die Inversen der  $\underline{\underline{A}}$  Dehnsteifigkeits-, der  $\underline{\underline{B}}$  Koppelsteifigkeits- und der  $\underline{\underline{D}}$  Biegesteifigkeitsmatrizen sind, siehe folgende Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\alpha}} & \underline{\underline{\beta}} \\ \underline{\underline{\beta}}^T & \underline{\underline{\delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.16)$$

Angesichts der Abbildung 4.5 ist zu erkennen, dass  $N_\eta$ ,  $N_{\xi\eta}$ ,  $M_\eta$  entlang der längslaufenen freien Kante gleich Null sind. Infolgedessen wird vereinfacht festgelegt, dass auch die Kräfte und Momente ( $N_\eta$ ,  $N_{\xi\eta}$ ,  $M_\eta$ ) über das gesamte Einzelsegment gleich Null sind.

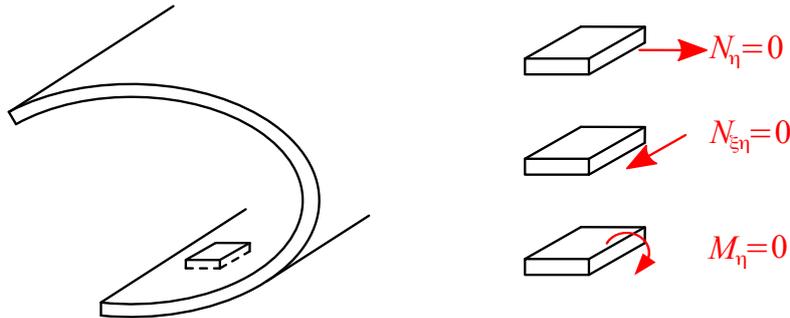


Abb. 4.5: Belastungen entlang der längslaufenen freien Kante eines dünnwandigen offenen Balkensegments.

Setzt man diese Vereinfachungen in die Gleichung 4.15 ein, kann folgende Verzerrungs-Kraft/Momenten-Beziehung für ein  $k$ -tes Balkensegment aufgestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi^0 \\ \kappa_\xi \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \delta_{16} \\ \beta_{16} & \delta_{16} & \delta_{66} \end{bmatrix}_k}_{\underline{\underline{\tilde{\mu}}}_k} \begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \underline{\underline{\tilde{\mu}}}_k \begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k \quad (4.17)$$

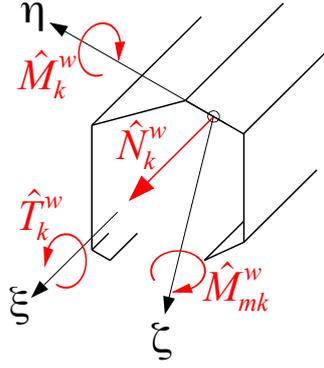


Abb. 4.6: Belastungen in einem dünnwandigen  $k$ -ten Balkensegment.

Für das  $\xi_k$ - $\eta_k$ - $\zeta_k$ -Koordinatensystem können die Belastungen für jedes  $k$ -te Balkensegment (siehe Abbildung 4.6), wie folgt berechnet werden:

$$\widehat{N}_{\xi k}^w = \int_{(b_k)} N_{\xi k} d\eta = b_k N_{\xi k}, \quad \text{bei } \eta = 0 \quad (4.18)$$

$$\widehat{M}_{\xi k}^w = \int_{(b_k)} M_{\xi k} d\eta = b_k M_{\xi k}, \quad \text{bei } \eta = 0 \quad (4.19)$$

$$\widehat{M}_{mk}^w = \int_{(b_k)} N_{\xi k} \eta d\eta, \quad (4.20)$$

wobei  $b_k$  die Breite eines Balkensegments entspricht. Für die Torsion wird folgende Gleichung angewandt [111]:

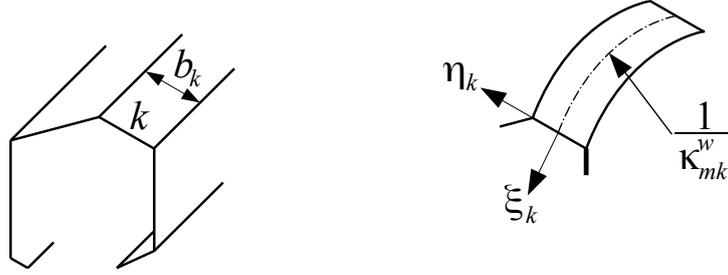
$$\widehat{T}_{\xi k}^w = -2 \int_{(b_k)} M_{\xi \eta k} d\eta = -2b_k M_{\xi \eta k}, \quad \text{bei } \eta = 0. \quad (4.21)$$

Der Exponent  $w$  bezieht sich auf die Schwerpunktschwerachse eines  $k$ -ten Balkensegments, nicht zu verwechseln mit der Durchbiegung in die  $z$ -Richtung. Dabei beziehen sich die Normalkraft und Momente ( $\widehat{N}^w$ ,  $\widehat{M}^w$ ,  $\widehat{T}^w$ ) auf diese Achse. Betrachtet man dieselben Symbole ohne das Dachzeichen, werden die Belastungen pro Längeneinheit gemessen.

Angesichts der Gleichungen (4.18), (4.19) und (4.21) kann festgestellt werden, dass in jedem Balkensegment sowohl die Dehnung  $\varepsilon_{\xi}^0$  als auch die Krümmungen  $\kappa_{\xi}$ ,  $\kappa_{\xi\eta}$  sich linear entlang der Breite, sprich in die  $\eta$ -Richtung, ändern (siehe Gleichung (4.13)). Dementsprechend verhalten sich die Normalkraft  $N_{\xi}$  und die Momente  $M_{\xi}$ ,  $M_{\xi\eta}$  auch linear entlang der Breite eines Balkensegments (siehe Gleichung (4.17)). Vereint man die Gleichungen (4.18), (4.19), (4.21), (4.13) und (4.17) miteinander, erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} = \frac{1}{b_k} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & -\frac{1}{2}\beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & -\frac{1}{2}\delta_{16} \\ -\frac{1}{2}\beta_{16} & -\frac{1}{2}\delta_{16} & \frac{1}{4}\delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Um das Integral aus der Gleichung (4.20) zu lösen, wird nur die Krümmung  $\kappa_{mk}^w$  des Balkensegments berücksichtigt. Es wird angenommen, dass das Segment sowohl vor als auch nach der Krümmung  $\kappa_{mk}^w$  flach bzw. eben bleibt (siehe Abbildung 4.7).

Abb. 4.7: Krümmung  $\kappa_{mk}^w$  eines Balkensegments.

Hierfür werden die Krümmungen  $\kappa_\xi$  und  $\kappa_{\xi\eta}$  gleich Null gesetzt. Mit dieser Vereinfachung kann die Gleichung (4.17) in invertierter Form wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi k}^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.23)$$

wobei die  $\underline{\tilde{A}}$ -Matrix folgendermaßen definiert ist:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix}_k^{-1} \quad (4.24)$$

Betrachtet man die erste Gleichung aus (4.23), kann für die Normalkraft folgender Ausdruck verwendet werden:

$$N_{\xi k} = \left( \tilde{A}_{11} \right)_k \varepsilon_{\xi k}^0 \quad (4.25)$$

Setzt man sowohl diese Gleichung als auch die Gleichung (4.8) in die Formel (4.20) ein, liefert die Integration nach  $\eta$  folgende Formel:

$$\widehat{M}_{mk}^w = \frac{\left( \tilde{A}_{11} \right)_k b_k^3}{12} \kappa_{mk}^w \quad (4.26)$$

Für die Verzerrungs-Kraft/Momenten-Beziehung im  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$ -Koordinatensystem werden nun die Gleichungen (4.22) und (4.26) miteinander verknüpft. Daraus ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} = \frac{1}{b_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{16} \\ 0 & 0 & \frac{12}{\left( \tilde{A}_{11} \right)_k b_k^2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{16} & -\frac{1}{2}\delta_{16} & 0 & \frac{1}{4}\delta_{66} \end{bmatrix}}_{\underline{\omega_k}} \begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

### Schritt 3: Kräfte und Momente im gesamten Balken

Die Belastungen im gesamten Balken, die sich auf das globale Koordinatensystem ( $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ ) beziehen, werden aus der Summe aller Belastungen der einzelnen Balkensegmente

errechnet.

$$\begin{pmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_k & \cos \alpha_k & \sin \alpha_k & 0 \\ \bar{y}_k & -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{R_k}}^T} \begin{pmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Hierfür wird die  $\underline{\underline{R_k}}$ -Matrix (siehe Gleichung (4.7)) benötigt, jedoch wird sie hier in der transponierten Form angewendet. Die Belastungen werden im  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem berechnet (siehe Gleichung (4.28)).

#### Schritt 4: Steifigkeitsmatrix für offene Profile

Bei einer Verbindung der Gleichungen (4.7), (4.27) und (4.28) können folgende Ausdrücke erstellt werden:

$$\begin{pmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \underline{\underline{R_k}}^T \begin{pmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \underline{\underline{R_k}}^T \underline{\underline{\omega_k}}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \underbrace{(\underline{\underline{R_k}}^T \underline{\underline{\omega_k}}^{-1} \underline{\underline{R_k}})}_{\underline{\underline{\bar{P}}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\bar{x}} \\ \frac{\rho_{\bar{y}}}{\bar{x}} \\ \frac{\rho_{\bar{z}}}{\bar{x}} \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Hierbei ist  $\underline{\underline{\bar{P}}}$  die Steifigkeitsmatrix, die sich auf das  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem bezieht. Um die Verschiebungen eines Balkens zu ermitteln, werden die Grundgleichungen benötigt, hierzu zählen bzw. werden zum einen sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen (siehe Gleichung (4.4)) und zum anderen die konstitutive Gleichung (siehe Gleichung (4.14)) herangezogen. Diese Gleichungen beziehen sich auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem. Die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix müssen im  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem angegeben werden. Aus diesem Grund muss die Steifigkeitsmatrix aus der Gleichung (4.29) in das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem transformiert werden. Die Transformation der Steifigkeitsmatrix vom  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem zum  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem wird in dieser Arbeit im Abschnitt 4.1.4 näher beschrieben.

#### 4.1.2 Geschlossener Balkenquerschnitt

In diesem Abschnitt werden nun geschlossene Balkenquerschnitte mit dünnwandigen Balkensegmenten analysiert. Für jedes Balkensegment wird das  $\xi_k$ - $\eta_k$ - $\zeta_k$ -Koordinatensystem verwendet, wobei der Ursprung wie bei den offenen Profilen sich im Schwerpunkt des jeweiligen  $k$ -ten Segments befindet. Die  $\eta_k$ -Achse, die parallel zur Breite eines Segments zeigt, verläuft im geschlossenen Profil gegen den Uhrzeigersinn, wie Abbildung 4.8 zeigt.

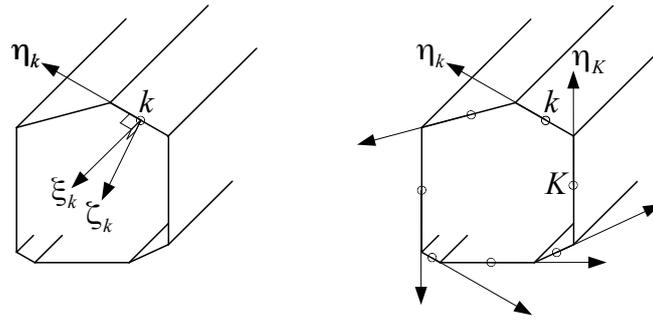


Abb. 4.8: Lokales Koordinatensystem in Bezug auf ein  $k$ -tes Balkensegment (links) und die Drehrichtung der  $\eta$ -Achse in einem geschlossenen Balkenquerschnitt (rechts).

Schneidet man einen geschlossenen Balkenquerschnitt an einer beliebigen Stelle, würden die beiden Schnittkanten dieselben Reaktionen hervorrufen, wobei eine der Kanten Reaktionen mit umgekehrten Vorzeichen erzeugt (siehe Abbildung 4.9). In einem nicht aufgeschnittenen Balken werden diese Deformationen sowohl von der Kraft  $X_1$ , dem Biegemoment  $X_2$  als auch von den zwei transversalen Kräften  $X_3$ ,  $X_4$  unterbunden. Diese Kräfte und Momente laufen entlang des Schnitts.

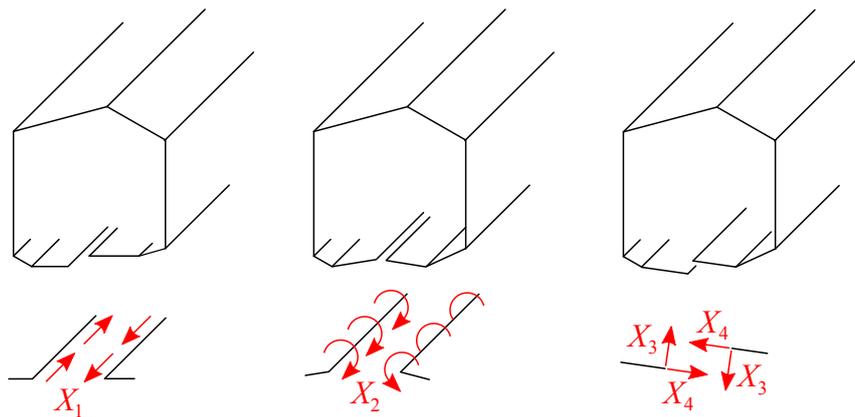


Abb. 4.9: Verschiebungen am Schnitt eines geschlossenen Balkenquerschnitts und die hervorgerufenen Kräfte und Momente entlang des Schnitts.

Über  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  und  $X_4$  wird in jedem  $k$ -ten Balkensegment  $V_\eta$ ,  $N_\eta$ ,  $N_{\xi\eta}$  und  $M_\eta$  hervorgerufen, dieser Vorgang wird in der Abbildung 4.10 dargestellt.

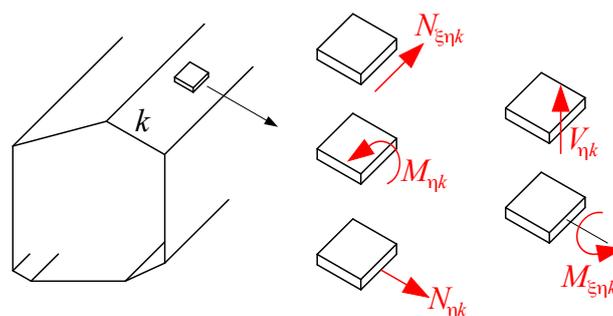


Abb. 4.10: Hervorgerufene Kräfte und Momente in einem infinitesimalen Schnittelement eines geschlossenen Balkenquerschnitts.

Die transversalen Kräfte  $X_3$  und  $X_4$  sind in der Regel sehr klein und können aus diesem Grund vernachlässigt werden. Dementsprechend sind  $N_\eta$  bzw.  $V_\eta$  in jedem Querschnittsegment gleich Null. Des Weiteren ändern sich  $N_{\xi\eta}$  und  $M_\eta$  entlang des Umfangs eines Segments nicht, folglich  $X_1$  und  $X_2$  auch nicht. Es gilt:

$$\begin{Bmatrix} N_{\xi\eta} \\ M_\eta \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.30)$$

hierbei ist  $N_{\xi\eta}$  der Schubfluss:

$$N_{\xi\eta} = X_1 \equiv q. \quad (4.31)$$

Sowohl die axiale Verschiebung als auch die Rotation entlang der beiden Schnittkanten müssen identisch sein (siehe Abbildung 4.11). Für diese Bedingungen müssen folgende Gleichungen herangezogen werden:

$$u|_{\text{links}} = u|_{\text{rechts}} \quad \frac{\partial w^0}{\partial \eta} \Big|_{\text{links}} = \frac{\partial w^0}{\partial \eta} \Big|_{\text{rechts}} \quad (4.32)$$

Hierbei ist  $u$  die axiale Verschiebung des Balkensegments in  $\eta_k$ -Richtung und  $w^0$  ist die Verschiebung, die senkrecht zur dazugehörigen Referenzfläche des jeweiligen Segments verläuft. Die erste Grundgleichung wird folgendermaßen beschrieben [108]:

$$-A\bar{\vartheta} + \oint \gamma_{\xi\eta}^0 d\eta = 0 \quad (4.33)$$

In die zweite Grundgleichung kann die folgende Definition eingesetzt werden.

$$\kappa_\eta = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial \eta^2} \quad (4.34)$$

In Abhängigkeit von der letzten Definition kann die zweite Grundgleichung wie folgt dargestellt werden:

$$\oint \kappa_\eta d\eta = 0 \quad (4.35)$$

Hierbei ist  $\eta$  die Koordinatenachse, die entlang des Umfangs des Balkenquerschnitts verläuft.  $A$  definiert hierbei die eingeschlossene Fläche. Die oben dargestellten Integrale müssen hierbei über den gesamten Umfang gelöst werden.

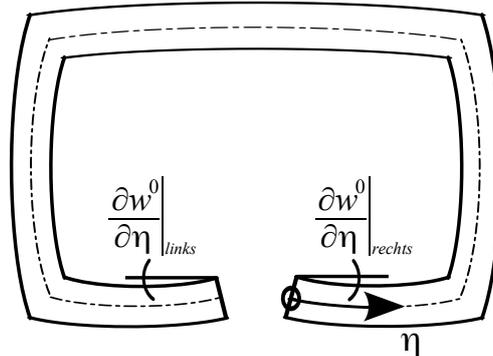


Abb. 4.11: Die relative Rotation der Schnittkante.

Für die Analyse von dünnwandigen geschlossenen Balken werden insgesamt fünf Schritte benötigt. Die ersten drei Schritte sind identisch mit der Analyse von dünnwandigen offenen Balken, wobei jetzt  $N_{\xi\eta}$  ( $= X_1$ ) und  $M_\eta$  ( $= X_2$ ) nicht gleich Null und unbekannt sind. Diese werden im viertem Schritt berechnet. Folgende fünf Schritte müssen betrachtet werden:

1. Die Dehnungen in jedem Balkensegment stehen mit der Längsdehnung, den Krümmungen und der Verdrillung der  $x$ -Achse des Balkens im Zusammenhang.
2. Die Belastungen in jedem Balkensegment werden sowohl über die Dehnungen des jeweiligen Balkensegments als auch über  $X_1$  und  $X_2$  ausgedrückt.
3. Die resultierenden Kräfte, Momente und die Torsion, die sich auf die  $x$ -Achse des Balkens beziehen, werden über die Belastungen von jedem Balkensegment ermittelt.
4.  $X_1$  und  $X_2$  werden über die Kompatibilitätsgleichungen bestimmt.
5. Die Steifigkeitsmatrix wird zum einem mithilfe der resultierenden Kräfte, Momenten und der Torsion, die sich auf die  $x$ -Achse des Balkens beziehen, und zum anderen mit der Längsdehnung, den Krümmungen und der Verdrillung der  $x$ -Achse ermittelt.

### Schritt 1: Verzerrungen im Balkensegment

Die Verzerrungen im Balkensegment werden in gleicher Weise berechnet, wie es schon für offene Querschnitte dargestellt wurde. Für ein  $k$ -tes Balkensegment können die Längsdehnung, die Krümmungen und die Verdrehung der Schwerpunktschwerachse über die Gleichung (4.7) berechnet werden. Die Längsdehnung ist linear abhängig von der Koordinatenachsen  $\eta$ , während die Krümmungen  $\kappa_{\xi k}$ ,  $\kappa_{\xi\eta k}$  nicht von  $\eta$  abhängen (siehe Gleichung (4.13)).

### Schritt 2: Kräfte und Momente im Balkensegment

$N_\eta$  wird gleich Null gesetzt, weil die Kräfte  $X_3$  und  $X_4$  im Rahmen dieser Herleitung vernachlässigbar klein sind. Des Weiteren gilt  $N_{\xi\eta} = X_1$ ,  $M_\eta = X_1$  und dass sie unabhängig vom Umfang sind. Über diese Vereinfachungen kann folgende Verzerrungs-Kraft/Momenten-Beziehung hergestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi^0 \\ \kappa_\xi \\ \kappa_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \beta_{61} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \delta_{16} \\ \beta_{16} & \delta_{16} & \delta_{66} \end{bmatrix}_k}_{\underline{\underline{\tilde{\mu}_k}}} \begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ \beta_{66} & \delta_{26} \end{bmatrix}_k}_{\underline{\underline{\tilde{v}_k}}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi\eta}^0 \\ \kappa_\eta \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & \beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & \delta_{26} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \alpha_{66} & \beta_{26} \\ \beta_{26} & \delta_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.37)$$

Die Gleichungen (4.18) bis (4.21) und (4.26) können vom offenen Balken abgeleitet und für geschlossene Balken adaptiert werden. All diese Gleichungen kombiniert mit der Gleichung

(4.36) ergeben folgenden Ausdruck:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\omega_k}} \begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.38)$$

wobei  $\underline{\underline{\omega_k}}$  in der Gleichung (4.27) beschrieben ist. Invertiert man die obige Gleichung, ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\omega_k}}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_k^w \\ \kappa_{\xi k}^w \\ \kappa_{mk}^w \\ \vartheta_k^w \end{Bmatrix} - \underline{\underline{\omega_k}}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.39)$$

### Schritt 3: Kräfte und Momente im Balken

Die inneren Belastungen eines Balkens im  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem sind in der Gleichung (4.28) dargestellt. Bei einem offenen Balkenquerschnitt ruft die Torsion nur das  $M_{\xi\eta}$ -Moment hervor, während bei einem geschlossenen Balkenquerschnitt sowohl das  $M_{\xi\eta}$ -Moment als auch der Schubfluss  $X_1$  hervorgerufen wird. Die Torsion, die infolge des Schubflusses  $X_1$  entsteht, wird von der Bredt-Batho-Formel abgeleitet [108]:

$$(\widehat{T}_{\bar{x}})_{\text{infolge } X_1} = 2AX_1, \quad (4.40)$$

wobei  $A$  die eingeschlossene Fläche ist. Mit dieser zusätzlichen Torsion verändert sich die Gleichung (4.28) wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^K \underline{\underline{R_k}}^T \begin{Bmatrix} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{mk}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.41)$$

wobei  $\underline{\underline{R_k}}^T$ -Matrix aus der Gleichung (4.28) entnommen werden kann.

### Schritt 4: Berechnung von $X_1$ und $X_2$

Setzt man zunächst die Gleichung (4.37) in die Gleichungen (4.33) und (4.35) ein, entsteht folgende Beziehung:

$$0 = - \begin{Bmatrix} 2A\bar{\vartheta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \oint \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & \beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & \delta_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{\xi} \\ M_{\xi} \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} d\eta + \oint \begin{bmatrix} \alpha_{66} & \beta_{62} \\ \beta_{62} & \delta_{22} \end{bmatrix} d\eta \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.42)$$

Die Integration über den kompletten Umfang eines Balkenquerschnitts wird erreicht, indem die Integration entlang jedes einzelnen Balkensegments durchführt und diese Integrale miteinander summiert werden. Es gilt:

$$\oint () d\eta = \sum_{k=1}^K \int_{(b_k)} () d\eta. \quad (4.43)$$

Bei Anwendung der Gleichung (4.43) für  $N_\xi$ ,  $M_\xi$  und  $M_{\xi\eta}$  ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\int_{(b_k)} N_\xi d\eta = \widehat{N}_{\xi k}^w \quad \int_{(b_k)} M_\xi d\eta = \widehat{M}_{\xi k}^w \quad \int_{(b_k)} M_{\xi\eta} d\eta = -\frac{1}{2} \widehat{T}_{\xi k}^w \quad (4.44)$$

Infolgedessen verändert sich die Gleichung (4.42) folgendermaßen:

$$0 = - \left\{ \begin{array}{c} 2A\bar{\vartheta} \\ 0 \end{array} \right\} + \sum_{k=1}^K \left( \left[ \begin{array}{ccc} \alpha_{16} & \beta_{61} & -\frac{1}{2}\beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \widehat{N}_{\xi k}^w \\ \widehat{M}_{\xi k}^w \\ \widehat{T}_{\xi k}^w \end{array} \right\} + b_k \left[ \begin{array}{cc} \alpha_{66} & \beta_{62} \\ \beta_{62} & \delta_{22} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} \right). \quad (4.45)$$

Bei einer Verknüpfung der Gleichungen (4.39) und (4.7) miteinander kann folgende Beziehung hergestellt werden:

$$0 = - \left\{ \begin{array}{c} 2A\bar{\vartheta} \\ 0 \end{array} \right\} + \underline{\underline{I}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{array} \right\} + \underline{\underline{F}} \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\}, \quad (4.46)$$

wobei für  $\underline{\underline{I}}$  Folgendes gilt:

$$\underline{\underline{I}} = \sum_{k=1}^K \left[ \begin{array}{cccc} \alpha_{16} & \beta_{61} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{array} \right]_k \underline{\underline{\omega}}_k^{-1} [R_k], \quad (4.47)$$

und für  $\underline{\underline{F}}$  gilt dieser Ausdruck:

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{k=1}^K \left( b_k \left[ \begin{array}{cc} \alpha_{66} & \beta_{62} \\ \beta_{62} & \delta_{22} \end{array} \right]_k - \left[ \begin{array}{cccc} \alpha_{16} & \beta_{61} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{array} \right]_k \underline{\underline{\omega}}_k^{-1} \left[ \begin{array}{cc} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{array} \right]_k \right). \quad (4.48)$$

Bei Invertierung der Gleichung (4.46) entsteht folgende Beziehung:

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{L}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{array} \right\}, \quad (4.49)$$

wobei  $\underline{\underline{L}}$  wie folgt berechnet wird:

$$\underline{\underline{L}} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \underline{\underline{I}}. \quad (4.50)$$

### Schritt 5: Steifigkeitsmatrix für geschlossene Profile

Um die Steifigkeitmatrix darstellen zu können, werden die Gleichungen (4.7), (4.39) und (4.41) miteinander verschmolzen, hierbei entsteht folgender Ausdruck:

$$\left\{ \begin{array}{c} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^K \underline{\underline{R}}_k^T \underline{\underline{\omega}}_k^{-1} \underline{\underline{R}}_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{array} \right\} + \left( \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2A & 0 \end{array} \right] - \underline{\underline{I}}^T \right) \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\}, \quad (4.51)$$

wobei  $\underline{\underline{I}}^T$  die transponierte Matrix von  $\underline{\underline{I}}$  ist. Setzt man nun die Gleichung (4.50) in den Ausdruck (4.51) ein, erhält man folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{k=1}^K \left( \underline{\underline{R}}_k^T \underline{\underline{\omega}}_k^{-1} \underline{\underline{R}}_k \right) + \left( \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{L}} \right)}_{\underline{\underline{P}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

wobei  $\underline{\underline{P}}$  die Steifigkeitsmatrix eines geschlossenen Balkenquerschnitts darstellt, dass sich auf das  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem bezieht.

### 4.1.3 Schwerpunkt des Balkenquerschnitts

In den vorherigen Abschnitten wurde die Steifigkeitsmatrix von sowohl offenen als auch geschlossenen Balkenquerschnitten, die sich auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen, hergeleitet und dargestellt. Um diese Matrizen auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem zu beziehen, d.h. auf den Schwerpunkt des Balkens, muss die Position des Schwerpunkts zunächst definiert werden. Die Lage des Schwerpunkts ist so definiert, dass die Längsachse nach einer reinen Belastung durch die Normalkraft  $\widehat{N}$  gerade bleibt, wobei  $\widehat{N}$  den Schwerpunkt durchläuft. Während die Achse gerade bleibt, kann der Balken sich um die Längsachse drehen und eine Verdrehung hervorrufen. Dieser Vorgang beeinflusst nicht die Lage des Schwerpunkts. Die Koordinaten des Schwerpunkts im  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem sind über  $z_c$  und  $y_c$  gekennzeichnet (siehe Abbildung 4.12). Die Kraft  $\widehat{N}_{\bar{x}}$  und die Momente  $\widehat{M}_{\bar{y}}$ ,  $\widehat{M}_{\bar{z}}$  die sich auf den Ursprung des  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem beziehen, besitzen zu den Belastungen, die im Schwerpunkt wirken, folgende Beziehungen:

$$\widehat{N}_{\bar{x}} = \widehat{N}, \quad \widehat{M}_{\bar{y}} = z_c \widehat{N}, \quad \widehat{M}_{\bar{z}} = y_c \widehat{N}. \quad (4.53)$$

Für offene und geschlossene Balkenquerschnitte sieht die Verzerrungs-Kraft/Momenten-Beziehung wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \bar{W}_{13} & \bar{W}_{14} \\ \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{24} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} & \bar{W}_{34} \\ \bar{W}_{14} & \bar{W}_{24} & \bar{W}_{34} & \bar{W}_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{N}_{\bar{x}} \\ \widehat{M}_{\bar{y}} \\ \widehat{M}_{\bar{z}} \\ \widehat{T}_{\bar{x}} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

wobei  $\underline{\underline{W}}$  die Nachgiebigkeitsmatrix ist, die sich auf das  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$  Koordinatensystem bezieht, dabei gilt folgende Beziehung:

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{P}}^{-1}, \quad (4.55)$$

hierbei ist  $\underline{\underline{P}}$  die Steifigkeitsmatrix, die sowohl für offene Profile (Gleichung (4.29)) als auch für geschlossene Profile (Gleichung (4.52)) verwendet werden kann.

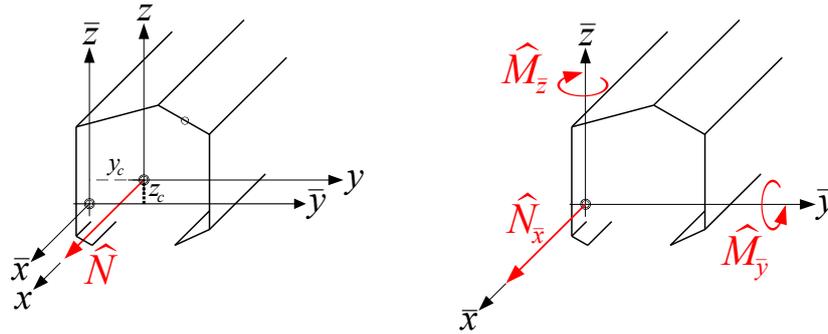


Abb. 4.12: Balken unter einer axialen Kraft, die im Schwerpunkt angreift (links), und die daraus resultierenden Belastungen, die im  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem wirken (rechts).

Die Gleichungen (4.53) und (4.54) bringen folgende Krümmungen hervor:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ y_c \end{Bmatrix} \hat{N} \quad (4.56)$$

Nach der Definition sind die Krümmungen des Balkens gleich Null, wenn  $\hat{N}$  am Schwerpunkt angebracht wird. Es gilt:

$$\frac{1}{\rho_{\bar{y}}} = \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} = 0. \quad (4.57)$$

Die Position des Schwerpunkts wird über das Einsetzen der Gleichung (4.57) in die Gleichung (4.56) ermittelt. Die Schwerpunktkoordinaten  $z_c$  und  $y_c$  können in Abhängigkeit von den Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix, die sich auf das  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystem bezieht, wie folgt berechnet werden:

$$\begin{Bmatrix} z_c \\ y_c \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} \\ \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{13} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

#### 4.1.4 Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix im Schwerpunktkoordinatensystem

In diesem Abschnitt soll der Ausdruck der Nachgiebigkeitsmatrix in der Gleichung (4.54) auf das Schwerpunktkoordinatensystem  $(x-y-z)$  transformiert werden. Die Beziehungen zwischen den Belastungen  $\hat{N}_{\bar{x}}$ ,  $\hat{M}_{\bar{y}}$ ,  $\hat{M}_{\bar{z}}$  im globalen Koordinatensystem  $(\bar{x}-\bar{y}-\bar{z})$  und der Längskraft  $\hat{N}$  im Schwerpunktkoordinatensystem  $(x-y-z)$  können aus der Gleichung (4.53) entnommen werden. Währenddessen ist die Torsion in beiden Koordinatensystemen identisch:

$$\hat{T}_{\bar{x}} = \hat{T}. \quad (4.59)$$

Die Gleichungen (4.53) und (4.59) in der Matrixform sehen wie folgt aus:

$$\begin{Bmatrix} \hat{N}_{\bar{x}} \\ \hat{M}_{\bar{y}} \\ \hat{M}_{\bar{z}} \\ \hat{T}_{\bar{x}} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R_b}} \begin{Bmatrix} \hat{N} \\ \hat{M}_y \\ \hat{M}_z \\ \hat{T} \end{Bmatrix}, \quad (4.60)$$

wobei  $\underline{\underline{R}}_b$  folgendermaßen definiert ist:

$$\underline{\underline{R}}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_c & 1 & 0 & 0 \\ y_c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Die Beziehung zwischen der axialen Dehnung der  $x$ -Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft, und der Dehnung und den Krümmungen der  $\bar{x}$ -Achse, die durch den Ursprung des globalen Systems verläuft, können aus der Gleichung (4.6) abgeleitet werden. Hierfür gilt:

$$\varepsilon_x^0 = \varepsilon_{\bar{x}}^0 + \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} z_c + \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} y_c \quad (4.62)$$

Die Krümmungen und Verdrehungen der  $x$ - und  $\bar{x}$ -Achse sind identisch. Zusammen mit diesen Bedingungen und der Gleichung (4.62) kann folgender Ausdruck dargestellt werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \frac{1}{\rho_y} \\ \frac{1}{\rho_z} \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}}_b^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \frac{1}{\rho_{\bar{y}}} \\ \frac{1}{\rho_{\bar{z}}} \\ \vartheta \end{Bmatrix}, \quad (4.63)$$

wobei  $\underline{\underline{R}}_b^T$  die transponierte Form der  $\underline{\underline{R}}_b$ -Matrix ist. Bei Substitution der Ausdrücke (4.60) und (4.63) in die Gleichung (4.54) kann folgende Verzerrung-Kraft/Momenten-Beziehung präsentiert werden:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \frac{1}{\rho_y} \\ \frac{1}{\rho_z} \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}}_b^T \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \bar{W}_{13} & \bar{W}_{14} \\ \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{24} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} & \bar{W}_{34} \\ \bar{W}_{14} & \bar{W}_{24} & \bar{W}_{34} & \bar{W}_{44} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \underline{\underline{R}}_b \begin{Bmatrix} \hat{N} \\ \hat{M}_y \\ \hat{M}_z \\ \hat{T} \end{Bmatrix}. \quad (4.64)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix im Schwerpunktkoordinatensystem wird wie folgt berechnet:

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{R}}_b^T \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \bar{W}_{13} & \bar{W}_{14} \\ \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{24} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} & \bar{W}_{34} \\ \bar{W}_{14} & \bar{W}_{24} & \bar{W}_{34} & \bar{W}_{44} \end{bmatrix} \underline{\underline{R}}_b, \quad (4.65)$$

in Matrixform sieht es folgendermaßen aus:

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{R}}_b^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{R}}_b \quad (4.66)$$

Mit einer Matrizenmultiplikation lässt sich nachweisen, dass die Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\underline{W}}$  im  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem vier Komponenten hat, die den Wert Null haben. Es gilt:

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ 0 & W_{23} & W_{33} & W_{34} \\ W_{14} & W_{24} & W_{34} & W_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

wobei  $W_{12}$  und  $W_{13}$  die Komponenten sind, die verschwinden, weil eine Normalkraft, die am Schwerpunkt angelegt ist, keine Biegungen hervorrufen kann. Bei Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix ergibt sich folgende Beziehung:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{34} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ 0 & W_{23} & W_{33} & W_{34} \\ W_{14} & W_{24} & W_{34} & W_{44} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.68)$$

wobei  $\underline{\underline{P}}$  die Steifigkeitsmatrix im  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem darstellt. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden folgende Notationen und Symbole für die Steifigkeitselemente aus der  $\underline{\underline{P}}$ -Matrix verwendet:

- Dehnsteifigkeit  $\implies P_{11} \longrightarrow \widehat{EA}$
- Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse  $\implies P_{22} \longrightarrow \widehat{EI}_{yy}$
- Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse  $\implies P_{33} \longrightarrow \widehat{EI}_{zz}$
- Torsionssteifigkeit  $\implies P_{44} \longrightarrow \widehat{GI}_t$
- Deviationssteifigkeit  $\implies P_{23} \longrightarrow \widehat{EI}_{yz}$
- Dehn-Biege-Steifigkeit um die  $y$ -Achse  $\implies P_{12} \longrightarrow \widehat{A}_{\varepsilon, \kappa yy}$
- Dehn-Biege-Steifigkeit um die  $z$ -Achse  $\implies P_{13} \longrightarrow \widehat{A}_{\varepsilon, \kappa zz}$
- Dehn-Torsions-Steifigkeit  $\implies P_{14} \longrightarrow \widehat{A}_{\varepsilon, \vartheta}$
- Biege-Torsions-Steifigkeit um die  $y$ -Achse  $\implies P_{24} \longrightarrow \widehat{A}_{\kappa yy, \vartheta}$
- Biege-Torsions-Steifigkeit um die  $z$ -Achse  $\implies P_{34} \longrightarrow \widehat{A}_{\kappa zz, \vartheta}$

## 4.2 Effektive Steifigkeiten

Um die globalen Stabilitätsprobleme von Trägern aus Verbundwerkstoffen in einer geschlossen-analytischen Form darstellen zu können, benötigt man die effektiven Steifigkeiten der jeweiligen Struktur. Die Herleitung von offenen und geschlossenen dünnwandigen Composite-Balken mit beliebigen Lagenaufbauten wird in Abschnitt 4.1 erklärt. In diesem Kapitel sollen nun für einen ausgesuchten Querschnitt mit verschiedenen Laminat-Konfigurationen die effektiven Steifigkeiten mit der geschlossen-analytischen Vorgehensweise berechnet und dargestellt werden.

Die Ergebnisse der geschlossen-analytischen Lösungen von den effektiven Steifigkeiten sind konstante Größen. Sie hängen nicht von Laufvariablen oder ähnlichen Faktoren ab, die die Qualität der Lösungen beeinflussen könnten. Für die Berechnung benötigt man folgende Informationen:

- Die Geometrie des betrachteten Querschnitts und
- die Materialeigenschaften der jeweiligen Laminatsegmente.

In den folgenden Abschnitten soll nun für die Geometrie ein I-Träger als Testobjekt verwendet werden. Insgesamt werden die drei Abmessungen des Balkenquerschnittes analysiert, die bereits in Kapitel 3 in Tab. 3.9 dargestellt wurden.

## 4.2.1 Materialeigenschaften

Die Materialkennwerte bzw. Ingenieurkonstanten für die jeweiligen Laminatsegmente können aus Tabelle 3.8 verwendet werden. Sowohl die Elastizitätsmoduln und Schubmoduln als auch die Querkontraktionszahlen, die für die Berechnung notwendig sind, beziehen sich stets auf eine UD-Schicht. Bevor die ABD-Matrizen der Laminatsegmente berechnet werden können, müssen für die UD-Schicht die reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  berechnet werden (s. Kapitel 2). Es ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 121630 \text{ MPa}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 2334 \text{ MPa}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 8645 \text{ MPa}, & Q_{66} &= G_{12} = 4700 \text{ MPa}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

bzw. in der Matrixform:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 121630 & 2334 & 0 \\ 2334 & 8645 & 0 \\ 0 & 0 & 4700 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (4.70)$$

Die transformierten reduzierten Steifigkeiten  $\bar{Q}_{ij}$  können über die Transformationsregeln und aus den Ergebnissen der  $\underline{\underline{Q}}$ -Matrix (4.70) ermittelt werden. Hierbei ist zu beachten, dass für jeden Orientierungswinkel  $\theta_k$  eine eigene transformierte reduzierte Steifigkeitsmatrix  $\bar{\underline{\underline{Q}}}_k$  entsteht. Insgesamt werden vier Orientierungswinkel betrachtet. Es generieren sich folgende Ausdrücke für die transformierten reduzierten Steifigkeitsmatrizen:

$$\begin{aligned} 0^\circ\text{-Schicht} &\rightarrow \bar{\underline{\underline{Q}}}_k = \begin{bmatrix} 121630 & 2334 & 0 \\ 2334 & 8645 & 0 \\ 0 & 0 & 4700 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ 90^\circ\text{-Schicht} &\rightarrow \bar{\underline{\underline{Q}}}_k = \begin{bmatrix} 8645 & 2334 & 0 \\ 2334 & 121630 & 0 \\ 0 & 0 & 4700 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ +45^\circ\text{-Schicht} &\rightarrow \bar{\underline{\underline{Q}}}_k = \begin{bmatrix} 38436 & 29036 & 28246 \\ 29036 & 38436 & 28246 \\ 28246 & 28246 & 31402 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \\ -45^\circ\text{-Schicht} &\rightarrow \bar{\underline{\underline{Q}}}_k = \begin{bmatrix} 38436 & 29036 & -28246 \\ 29036 & 38436 & -28246 \\ -28246 & -28246 & 31402 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Unter Zuhilfenahme der Rechenregeln des Kapitels 2 und den ermittelten transformierten reduzierten Steifigkeiten lassen sich die ABD-Matrizen der drei Gurtlaminatsegmente und des Steges berechnen. Für den Steg, der für alle drei Laminat-Konfigurationen verwendet wird, sind sowohl die Steifigkeiten als auch die Nachgiebigkeiten als Matrixform in Tabelle 4.1 gelistet.

**Steg:**  $[\pm 45_{16}^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ}]_{4S}$

Steifigkeiten	Nachgiebigkeiten
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1,0058 & 0,4786 & 0 \\ 0,4786 & 1,0058 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5306 \end{bmatrix} 10^9$	$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0,1285 & -0,0612 & 0 \\ -0,0612 & 0,1285 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1885 \end{bmatrix} 10^{-8}$
$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0,3830 & 0,2099 & 0,0033 \\ 0,2099 & 0,3944 & 0,0033 \\ 0,0033 & 0,0033 & 0,2309 \end{bmatrix} 10^5$	$\underline{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} 0,3687 & -0,1963 & -0,0025 \\ -0,1963 & 0,3580 & -0,0023 \\ -0,0025 & -0,0023 & 0,4330 \end{bmatrix} 10^{-4}$
$\underline{\underline{A}}$ in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ $\underline{\underline{D}}$ in $[\text{Nm}]$	$\underline{\underline{\alpha}}$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{N}}\right]$ $\underline{\underline{\delta}}$ in $\left[\frac{1}{\text{Nm}}\right]$

Tabelle 4.1: Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten des Steges aus der Laminat-Konfiguration A, B und C.

Die Ergebnisse der Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten der unterschiedlichen Gurte sind im Folgenden in der Matrixschreibweise tabellarisch dargestellt.

**Laminat A → Gurt:**  $[0_{20}^{\circ}/\pm 45_4^{\circ}/90_4^{\circ}]_{4S}$

Steifigkeiten	Nachgiebigkeiten
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2,6201 & 0,1722 & 0 \\ 0,1722 & 0,8132 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2384 \end{bmatrix} 10^9$	$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0,0397 & -0,0082 & 0 \\ -0,0082 & 0,1247 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4195 \end{bmatrix} 10^{-8}$
$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1,845 & 0,0975 & 0,0008 \\ 0,0975 & 0,4523 & 0,0008 \\ 0,0008 & 0,0008 & 0,1408 \end{bmatrix} 10^5$	$\underline{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} 0,0548 & -0,0126 & -0,0003 \\ -0,0126 & 0,2380 & -0,0014 \\ -0,0003 & -0,0014 & 0,7102 \end{bmatrix} 10^{-4}$
$\underline{\underline{A}}$ in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ $\underline{\underline{D}}$ in $[\text{Nm}]$	$\underline{\underline{\alpha}}$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{N}}\right]$ $\underline{\underline{\delta}}$ in $\left[\frac{1}{\text{Nm}}\right]$

Tabelle 4.2: Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten des Gurtes aus der Laminat-Konfiguration A.

<b>Laminat B → Gurt: <math>[0_{17}^{\circ}/\pm 45_4^{\circ}/90_4^{\circ}]_{4S}</math></b>			
<b>Steifigkeiten</b>		<b>Nachgiebigkeiten</b>	
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2,2560 & 0,1652 & 0 \\ 0,1652 & 0,7872 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2243 \end{bmatrix} 10^9$		$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0,0450 & -0,0094 & 0 \\ -0,0094 & 0,1290 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4458 \end{bmatrix} 10^{-8}$	
$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1,2792 & 0,0750 & 0,0008 \\ 0,0750 & 0,3278 & 0,0008 \\ 0,0008 & 0,0008 & 0,1058 \end{bmatrix} 10^5$		$\underline{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} 0,0792 & -0,0181 & -0,0004 \\ -0,0181 & 0,3092 & -0,0021 \\ -0,0004 & -0,0021 & 0,9449 \end{bmatrix} 10^{-4}$	
$\underline{\underline{A}}$ in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ $\underline{\underline{D}}$ in [Nm]		$\underline{\underline{\alpha}}$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{N}}\right]$ $\underline{\underline{\delta}}$ in $\left[\frac{1}{\text{Nm}}\right]$	

Tabelle 4.3: Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten des Gurtes aus der Laminat-Konfiguration B.

<b>Laminat C → Gurt: <math>[0_{15}^{\circ}/\pm 45_4^{\circ}/90_4^{\circ}]_{4S}</math></b>			
<b>Steifigkeiten</b>		<b>Nachgiebigkeiten</b>	
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2,0128 & 0,1605 & 0 \\ 0,1605 & 0,7699 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2149 \end{bmatrix} 10^9$		$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0,0505 & -0,0105 & 0 \\ -0,0105 & 0,1321 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4653 \end{bmatrix} 10^{-8}$	
$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0,9726 & 0,0621 & 0,0007 \\ 0,0750 & 0,2714 & 0,0007 \\ 0,0007 & 0,0007 & 0,0861 \end{bmatrix} 10^5$		$\underline{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} 0,1040 & -0,0240 & -0,0010 \\ -0,0240 & 0,3740 & -0,0030 \\ -0,0010 & -0,0030 & 1,1620 \end{bmatrix} 10^{-4}$	
$\underline{\underline{A}}$ in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ $\underline{\underline{D}}$ in [Nm]		$\underline{\underline{\alpha}}$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{N}}\right]$ $\underline{\underline{\delta}}$ in $\left[\frac{1}{\text{Nm}}\right]$	

Tabelle 4.4: Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten des Gurtes aus der Laminat-Konfiguration C.

Da es sich sowohl bei den Gurtlaminaten als auch bei dem einem Steg um symmetrische Lagenaufbauten handelt, können die Komponenten der Kopplungsmatrix  $\underline{\underline{B}}$  komplett entfallen. Ebenso sind die Lamine frei von jeglichen Schubkopplungen, d.h. die Dehnsteifigkeit  $A_{16}$  als auch die Dehnsteifigkeit  $A_{26}$  können gleich Null gesetzt werden. Da die Lamine Biege-Drill-Kopplung aufweisen, dürfen die Terme  $D_{16}$  und  $D_{26}$  aus der Biegesteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{D}}$  keinesfalls verschwinden. Im weiteren Lauf der Arbeit werden sowohl die Steifigkeiten als auch die Nachgiebigkeiten aus den Tabellen 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 entnommen und für weitere Berechnungen verwendet werden.

## 4.2.2 Analytische Auswertung

In diesem Abschnitt werden für einen expliziten Balkenquerschnitt sowohl die globalen als auch die sich auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem beziehenden effektiven Steifigkeiten mithilfe der Theorie, die in Abschnitt 4.1 hergeleitet wird, vollständig berechnet. Für

den ersten Balkenquerschnitt soll ein offenes Profil gewählt werden. Hierfür soll ein I-Profil als Basis dienen. Aus den vorhandenen Konfigurationen soll für das Laminat A die vollständige Berechnung durchgeführt werden. Anschließend werden die Ergebnisse für alle Konfigurationen miteinander verglichen, wobei die numerischen Lösungen aus der FEM als Verifizierung verwendet werden. Zunächst benötigt man die Geometrie des Trägers, der in Abbildung 4.13 dargestellt ist.

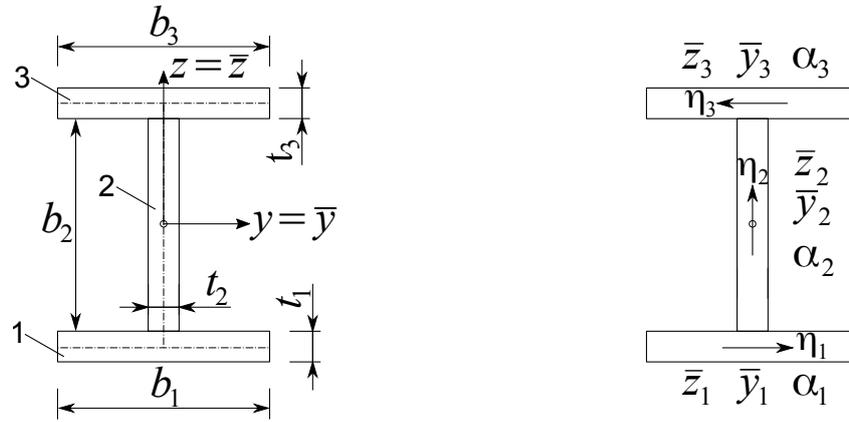


Abb. 4.13: Geometrische Parameter für einen I-Träger.

Zusätzlich zu den Geometrien sind in der Abbildung die einzelnen Balkensegmente mit den jeweiligen nummerierten Bemaßungen und Achsenbeschriftungen markiert. Die Werte für die Parameter aus der linken und rechten Darstellung, die sich in Abbildung 4.13 befinden, können aus Tabelle 4.5 entnommen werden.

Segment $k$	$b_k$ [m]	$t_k$ [m]	$\bar{z}_k$ [m]	$\bar{y}_k$ [m]	$\alpha_k$ [°]
1	0,200	0,028	-0,236	0	0
2	0,444	0,022	0	0	90
3	0,200	0,028	0,236	0	180

Tabelle 4.5: Parameter für ein I-Träger mit der Laminat-Konfiguration A.

Der Parameter  $b_k$  beschreibt die jeweilige Breite eines Balkensegments.  $t_k$  stellt die Dicke des Gurtes bzw. des Steges dar. Die  $\eta_k$ -Koordinate läuft entlang des Umrisses bzw. liegt immer parallel zur Breite des Segments und beschreibt den Umlauf des Querschnitts. Der Winkel zwischen der jeweiligen  $\eta_k$ -Koordinate und der globalen  $\bar{y}$ -Achse wird mit  $\alpha_k$  gekennzeichnet. Die Abstände sowohl in  $z$ - als auch in  $y$ -Richtung zwischen den Schwerpunkt eines Balkensegments und dem globalen Ursprungspunkt werden über die Konstanten  $\bar{z}_k$  und  $\bar{y}_k$  beschrieben.

Aus Abbildung 4.13 ist zu entnehmen, dass der I-Träger aus drei Einzelsegmenten besteht, wobei zwei davon, die Gurte, identische Geometrien aufweisen. Für die Berechnung der effektiven Steifigkeiten wird im ersten Schritt die folgende Matrix benötigt:

$$\underline{\underline{R}}_k = \begin{bmatrix} 1 & \bar{z}_k & \bar{y}_k & 0 \\ 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & 0 \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Setzt man für jedes Balkensegment die Parameter aus Tabelle 4.5 in die Matrix ein, ergeben sich drei Ausdrücke für die  $\underline{\underline{R}}_k$ -Matrix:

$$\underline{\underline{R}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,236 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0,236 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Für jeden Gurt bzw. Steg kann die  $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ -Matrix wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{\underline{A}}}_{11} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{12} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{13} \\ \tilde{\underline{\underline{A}}}_{12} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{22} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{23} \\ \tilde{\underline{\underline{A}}}_{13} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{23} & \tilde{\underline{\underline{A}}}_{33} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix}_k^{-1}. \quad (4.74)$$

Für die weitere Berechnung ist aus dieser Matrix nur die  $\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}$ -Komponente notwendig. Bei einer Inventurierung der rechten Matrix ergibt sich für den  $\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}$ -Parameter folgender Ausdruck:

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11} = \frac{\delta_{16}^2 - \delta_{11}\delta_{66}}{\alpha_{11}(\delta_{16}^2 - \delta_{11}\delta_{66}) + \delta_{11}\beta_{16}^2 + \delta_{66}\beta_{11}^2 - 2\beta_{11}\beta_{16}\delta_{16}}. \quad (4.75)$$

Da die Gurte im Vergleich zum Steg unterschiedliche Lamine besitzen, ergeben sich zwei Werte für den  $\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}$ -Parameter. Für die Gurte kann ein Wert von

$$\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}\right)_1 = \left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}\right)_3 = 2584 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.76)$$

ermittelt werden. Beim Steg erhält man folgenden Zahlenwert:

$$\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11}\right)_2 = 778,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (4.77)$$

Auch die  $\underline{\underline{\omega}}_k$ -Matrizen hängen von den Nachgiebigkeiten des jeweiligen Balkensegments ab. Es gilt:

$$\underline{\underline{\omega}}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{16} \\ 0 & 0 & \frac{12}{(\tilde{\underline{\underline{A}}}_{11})_k b_k^2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{16} & -\frac{1}{2}\delta_{16} & 0 & \frac{1}{4}\delta_{66} \end{bmatrix}_k. \quad (4.78)$$

Mit einer Breite von  $b_1 = 0,2 \text{ m}$  und den Nachgiebigkeiten aus Tabelle 4.2 können für die Gurte folgende Matrizenwerte für das  $[\omega_k]$  festgelegt werden:

$$\underline{\underline{\omega}}_1 = \underline{\underline{\omega}}_3 = \begin{bmatrix} 1,935 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,274 \cdot 10^{-4} & 0 & 0,0007 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0,0058 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,0007 \cdot 10^{-4} & 0 & 0,8878 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Die Breite des Steges ist mit  $b_2 = 0,444 \text{ m}$  festgesetzt. Die sich einstellenden Werte für die Matrix  $\underline{\underline{\omega}}_k$  sehen folgendermaßen aus:

$$\underline{\underline{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 2,894 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8304 \cdot 10^{-4} & 0 & 0,0028 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0,0018 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,0028 \cdot 10^{-4} & 0 & 0,2438 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Über die Formel

$$\underline{\underline{P}} = \sum_{k=1}^K \left( \underline{\underline{R}}_k^T \underline{\underline{\omega}}_k^{-1} \underline{\underline{R}}_k \right) \quad (4.81)$$

kann nun die globale Steifigkeitsmatrix des I-Trägers bestimmt werden. Es gilt die folgende Summe:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}} &= \left( \underline{\underline{R}}_1^T \underline{\underline{\omega}}_1^{-1} \underline{\underline{R}}_1 \right) + \left( \underline{\underline{R}}_2^T \underline{\underline{\omega}}_2^{-1} \underline{\underline{R}}_2 \right) + \left( \underline{\underline{R}}_3^T \underline{\underline{\omega}}_3^{-1} \underline{\underline{R}}_3 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 13791 \cdot 10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63316000 & 0 & -62 \\ 0 & 0 & 3457300 & 139 \\ 0 & -62 & 139 & 63547 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Bei Inventierung dieser Matrix ergibt sich die globale Nachgiebigkeitsmatrix des Trägers. Es gilt:

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} 7,25 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,58 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,89 \cdot 10^{-7} & -6,33 \cdot 10^{-10} \\ 0 & 0 & -6,33 \cdot 10^{-10} & 1,57 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

wobei  $\bar{W}_{11}$  als Messgröße  $\frac{1}{N}$  besitzt. Für  $\bar{W}_{22}$ ,  $\bar{W}_{23}$ ,  $\bar{W}_{24}$ ,  $\bar{W}_{33}$ ,  $\bar{W}_{34}$  und  $\bar{W}_{44}$  gilt die Einheit  $\frac{1}{Nm^2}$ . Außerdem stellt sich für die Nachgiebigkeiten  $\bar{W}_{12}$ ,  $\bar{W}_{13}$  und  $\bar{W}_{14}$  die Maßeinheit  $\frac{1}{Nm}$  ein.

Über die Gleichung (4.84) lässt sich der Schwerpunkt des Querschnitts berechnen. Hierfür werden die globalen Nachgiebigkeiten aus der  $\underline{\underline{W}}$ -Matrix benötigt. Da der Ursprung des globalen Koordinatensystems auf dem Schwerpunkt gelegt wird, müsste aus der Gleichung (4.84) resultieren, dass die Schwerpunktkoordinaten  $z_c$  und  $y_c$  gleich Null sind. Zur Überprüfung soll diese Aussage überprüft werden. Folgende Ergebnisse stellen sich für die Schwerpunktkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} z_c \\ y_c \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} \\ \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{13} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 1,58 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 2,89 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Bei beliebigen Querschnitten müsste zunächst die globale Nachgiebigkeitsmatrix zu der Nachgiebigkeitsmatrix, die sich auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem bezieht, transformiert werden. Über eine Invertierung dieser Nachgiebigkeitsmatrix würde man nun auch die effektive Steifigkeitsmatrix erhalten, die sich auf das Schwerpunktkoordinatensystem bezieht. Da nun der globale Ursprung auf dem Schwerpunkt liegt, kann folgende Beziehung festgelegt werden:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}, \quad (4.85)$$

wobei die  $\underline{\underline{P}}$ -Matrix sich auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem bezieht.

Über die Notation aus den Abschnitt 4.1 und den Werten aus der Matrix (4.82) können folgende effektive Steifigkeiten ermittelt werden:

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Dehnsteifigkeit	$\widehat{EA}$	$13791 \cdot 10^9$	[N]
Biegesteifigkeit um die $y$ -Achse	$\widehat{EI}_{yy}$	63316000	[Nm <sup>2</sup> ]
Biegesteifigkeit um die $z$ -Achse	$\widehat{EI}_{zz}$	3457300	[Nm <sup>2</sup> ]
Deviationsteifigkeit	$\widehat{EI}_{yz}$	0	[Nm <sup>2</sup> ]
Torsionssteifigkeit	$\widehat{GI}_t$	63547	[Nm <sup>2</sup> ]
Dehn-Biege-Steifigkeit um die $y$ -Achse	$\widehat{A}_{\varepsilon, \kappa_{yy}}$	0	[Nm]
Dehn-Biege-Steifigkeit um die $z$ -Achse	$\widehat{A}_{\varepsilon, \kappa_{zz}}$	0	[Nm]
Dehn-Torsion-Steifigkeit	$\widehat{A}_{\varepsilon, \vartheta}$	0	[Nm]
Biege-Torsion-Steifigkeit um die $y$ -Achse	$\widehat{A}_{\kappa_{yy}, \vartheta}$	-62	[Nm <sup>2</sup> ]
Biege-Torsion-Steifigkeit um die $z$ -Achse	$\widehat{A}_{\kappa_{zz}, \vartheta}$	139	[Nm <sup>2</sup> ]

Tabelle 4.6: Effektive Steifigkeiten eines I-Trägers mit der Laminat-Konfiguration A.

Da der betrachtende Querschnitt symmetrisch ist, stellt sich für die Deviationssteifigkeit ein Wert von Null ein. Für sowohl die Dehn-Biege-Steifigkeit um die  $y$ -Achse bzw.  $z$ -Achse als auch für die Dehn-Torsion-Steifigkeit ergeben sich Zahlenwerte, die gleich Null sind. Des Weiteren können Ergebnisse für die Biege-Torsion-Steifigkeit um die  $y$ -Achse und um die  $z$ -Achse festgestellt werden, die im Vergleich zu den anderen Steifigkeiten einen viel niedrigeren Werte aufweisen.

In Tabelle 4.7 sind die analytischen Lösungen eines I-Trägers mit den Laminat-Konfigurationen von A bis C aufgelistet, wobei die effektiven Steifigkeiten, die gleich Null sind, nicht mitaufgeführt werden.

Laminat-Konfiguration	$\widehat{EA}$ [N]	$\widehat{EI}_{yy}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_{zz}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{GI}_t$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{yy}, \vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{zz}, \vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_\omega$ [Nm <sup>4</sup> ]
A	1379117023	63316207	3457349	63547	-62	139	191889
B	1322438392	72471886	3443562	63971	-45	157	236348
C	1302415533	83588180	3529218	66326	-73	174	292494

Tabelle 4.7: Effektive Steifigkeiten eines I-Profiles mit den Laminat-Konfigurationen A, B und C.

Bei einem Vergleich der Lösungen zu der Dehnsteifigkeit  $\widehat{EA}$  der unterschiedlichen Laminat-Konfigurationen ist zu erkennen, dass das Laminat A den größten Wert aufweist. Das Laminat B besitzt die zweite größte Dehnsteifigkeit. Der niedrigste Wert wird beim Laminat C ermittelt. Der Grund hierfür ist, dass die Konfiguration A im Vergleich zu den anderen eine erheblich größere Membransteifigkeit  $A_{11}$  besitzt, obwohl die Querschnittsfläche der Konfiguration A im Gegensatz zu den anderen beiden geringer ist. Für die Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse  $\widehat{EI}_{yy}$  stellen sich genau umgekehrte Größenunterschiede ein. Da das Laminat C die größte Höhe besitzt, stellt sich für das Flächenmoment ein größerer Steineranteil ein als bei den anderen Konfigurationen. Somit besitzt das Laminat C für die Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse das Höchstmaß. Neben der Torsionssteifigkeit  $\widehat{GI}_t$

kann auch für die Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse  $\widehat{EI}_{zz}$  ein geringfügiger Unterschied zwischen den drei untersuchten Laminat-Konfigurationen festgestellt werden. Die Differenzen der Torsionssteifigkeit  $\widehat{GI}_t$  hängt davon ab, dass die Biegesteifigkeit  $D_{66}$  vom Laminat A bis C niedriger wird. Da sich um die  $z$ -Achse keine Steineranteile ergeben, hängt die Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{zz}$  hauptsächlich von den Nachgiebigkeiten aus den Tabellen 4.1 bis 4.4 ab.

### 4.2.3 Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt soll eine Verifizierung der Lösungen zu den Ergebnissen der effektiven Steifigkeiten für einen I-Querschnitt durchgeführt werden, um die analytischen Lösungen zu bestätigen. Hierfür wird die FEM als Unterstützung herangezogen. Da die FE-Methode selbst jedoch ein Näherungsverfahren ist, kann sie nicht als exaktes Lösungsverfahren angesehen werden. Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse sollen mithilfe der Finite-Elemente-Methode lediglich der Verifizierung der geschlossen-analytischen Lösungen dienen. Zuvor sollen die FEM-Modelle, die für die Erzeugung der Lösungen verwendet werden, durch eine Konvergenzstudie geführt werden, um sicherzustellen, dass die Modelle gegen eine Lösung konvergieren.

#### Konvergenzstudie der FEM-Modelle

In diesem Abschnitt soll das benötigte FE-Modell durch eine Konvergenzstudie bestätigt werden, um zu überprüfen, ob die numerische Lösung der FEM mit steigender Elementzahl gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Für die kommenden Konvergenzstudien wird ein I-Träger mit der Laminat-Konfiguration B als Testobjekt verwendet. Insgesamt werden drei unterschiedliche Feinheiten des Netzes verglichen und untersucht. Zu Beginn wird ein relativ grobes Netz definiert (siehe Abbildung 4.14). Im nächsten Schritt wird eine mittelfeine und eine sehr feine Vernetzung untersucht, die in den Abbildungen 4.15 und 4.16 dargestellt sind.

Die Diskretisierung der Balkenstrukturen werden ausschließlich mithilfe von linearen Schalenelemente durchgeführt. Neben den linearen Elementen bietet ANSYS auch quadratische Schalenelemente an, die insgesamt pro Element 8 Knoten besitzen. In dieser Arbeiten wurden einige FE-Berechnungen mit Schalenelement durchgeführt, die quadratische Ansätze verwenden. Jedoch besteht nur ein geringfügiger Unterschied zwischen den beiden Elementen in den Lösungen. Infolgedessen werden nur noch lineare Schalenelemente eingesetzt, weil sie eine niedrige Berechnungsdauer besitzen. Neben dem Elemententyp spielt bei der FE-Analyse die Anzahl der finiten Elemente eine große Rolle. Die Menge der verwendeten Elemente hat einen entscheidenden Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse. Hierbei ist zu beachten: Je höher die Elementanzahl ist, desto länger kann eine Berechnungsanalyse dauern. Zusätzlich kann eine zu hoch bzw. zu niedrig gewählte Anzahl von Elementen zu irreführenden oder sogar zu falschen Ergebnissen führen. Im Folgenden wird die in dieser Arbeit durchgeführte Konvergenzstudie für die präsentierten effektiven Steifigkeiten beschrieben. Anhand der Abbildung 4.17 kann festgestellt werden, dass die FEM-Lösung mit zunehmender Elementenanzahl gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Der Verlauf der groben Vernetzung läuft nicht stetig, sodass nicht genügend Elemente für die FE-Berechnung verwendet werden. Die sowohl mittelfeine als auch die

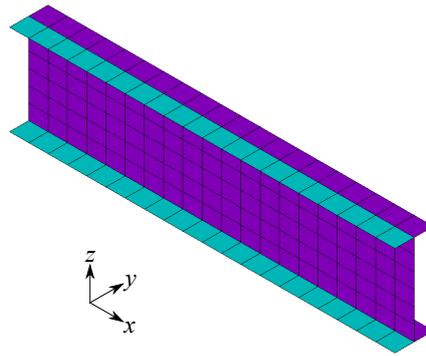


Abb. 4.14: Grobe Vernetzungsdichte.

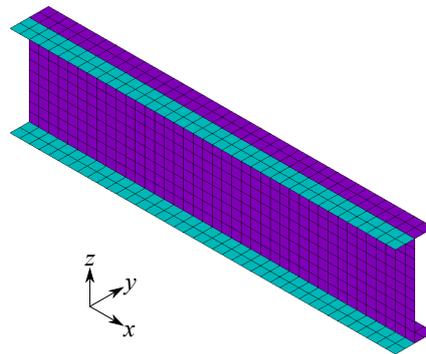


Abb. 4.15: Mittelfeine Vernetzungsdichte.

sehr feine Diskretisierung der effektiven Dehnsteifigkeit über die Länge zeigen hingegen eine stetig verlaufende Kurve. Bei kleinen Balkenlängen können relativ große Unterschiede zwischen den Kurven entdeckt werden. Mit steigender Länge erkennt man eine deutliche Verbesserung der FE-Ergebnisse.

Für die effektive Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse bzw. um die  $z$ -Achse zeigt die Konvergenzstudie, dass sich für alle drei Vernetzungsdichten relativ identische Lösungen ergeben. Mit zunehmender Anzahl der Elemente konvergiert die Lösung gegen einen Wert.

Auch für die effektive Torsionssteifigkeit können deckungsgleiche Ergebnisse bzw. übereinstimmende Aussagen zur Konvergenzstudie erstellt werden. Dementsprechend wird für die Auswertung der FEM-Modelle nur noch die sehr feine Vernetzung gewählt.

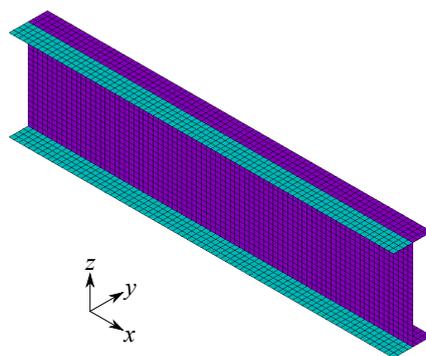


Abb. 4.16: Feine Vernetzungsdichte.

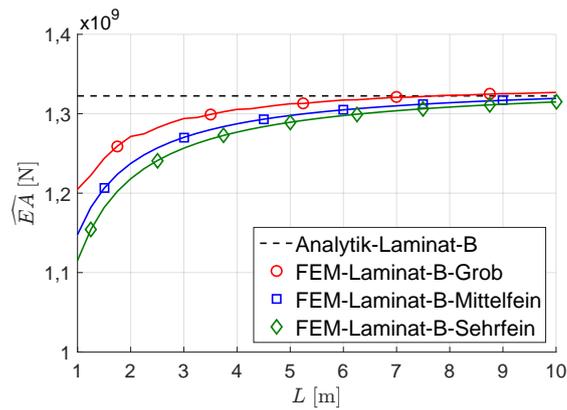


Abb. 4.17: Konvergenzstudie der Dehnsteifigkeit  $\widehat{EA}$  für die Konfiguration B.

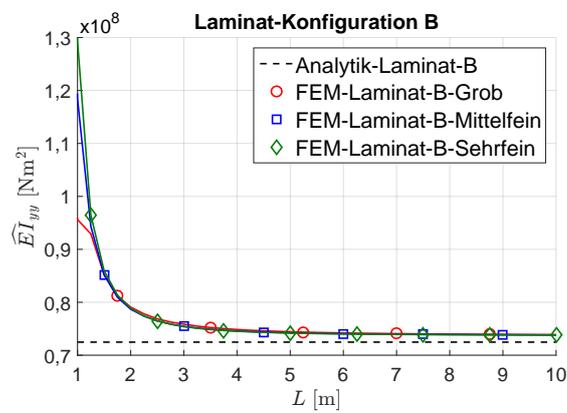


Abb. 4.18: Konvergenzstudie der Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  für die Konfiguration B, Intervall von 1 m bis 10 m.

## Numerische Ergebnisse

In dieser Arbeit sollen nun die Balkenstrukturen in ein FEM-Modell umgesetzt werden, um die hergeleiteten analytischen Ergebnisse der effektiven Steifigkeiten zu verifizieren. Für die FEM-Modellierung wird das Berechnungsprogramm ANSYS Workbench und AN-

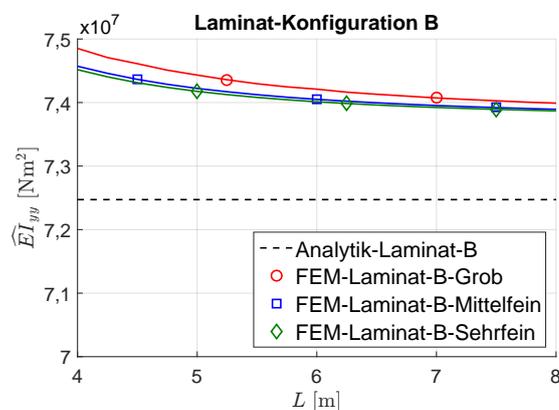


Abb. 4.19: Konvergenzstudie der Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  für die Konfiguration B, Intervall von 4 m bis 8 m.

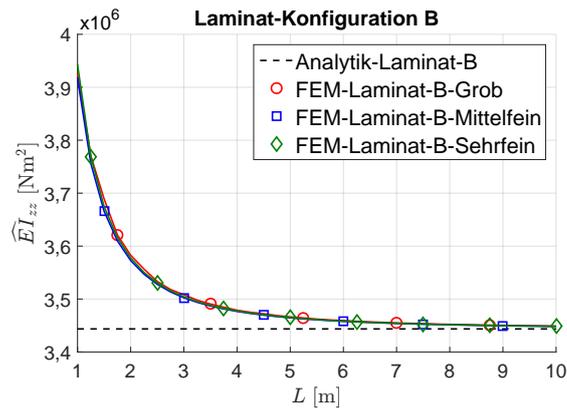


Abb. 4.20: Konvergenzstudie der Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{zz}$  für die Konfiguration B, Intervall von 1 m bis 10 m.

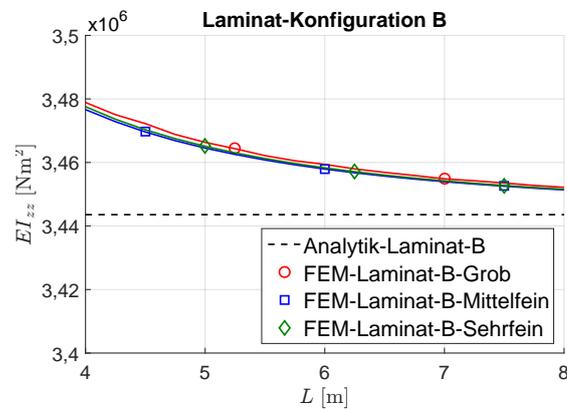


Abb. 4.21: Konvergenzstudie der Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{zz}$  für die Konfiguration B, Intervall von 4 m bis 8 m.

SYS APDL verwendet. Folgende Schritte müssen für ein funktionsfähiges Modell befolgt werden:

1. Geometrie erstellen,
2. Material erzeugen und zuweisen,

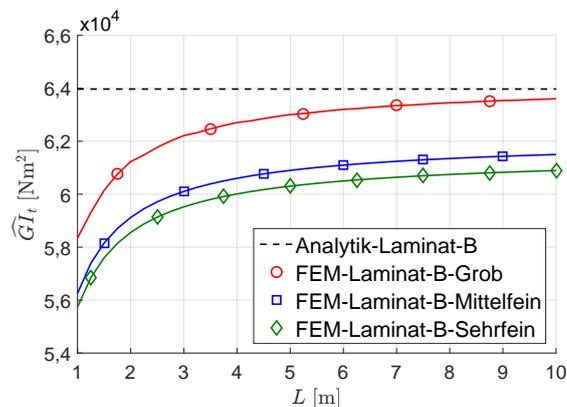


Abb. 4.22: Konvergenzstudie der Torsionssteifigkeit  $\widehat{GI}_t$  für die Konfiguration B.

3. Randbedingungen festlegen,
4. Belastungen aufbringen,
5. Struktur vernetzen.

In der Programmiersprache APDL von ANSYS wurde hierzu ein vollautomatisiertes Skript erstellt.

Die Dicken  $t_g$  und  $t_s$  der Träger sind im Vergleich zu den Außenabmessungen  $h$  und  $b_k$  viel kleiner. Aus diesem Grund werden für die Modellierungen der Composite-Träger lediglich zweidimensionale finite Elemente verwendet. ANSYS bietet für die Diskretisierung der Modelle eine Vielzahl von Elementtypen, die sich in ihren Ansätzen und geometrischen Formen als auch in der Anzahl der Knotenpunkte unterscheiden. Hierbei lassen sie sich in Kontinuum- und Strukturelemente unterscheiden. In diesem Abschnittes werden nur die zweidimensionalen Schalenelemente verwendet und beschrieben. Im Folgenden werden allgemeine Informationen zu den verwendeten Elementen der FEM näher erläutert [105]:

- Es wird ein lineares 4-Knoten-Element mit sechs Freiheitsgraden an jedem Knoten betrachtet (siehe Abbildung 4.23).
- Die Freiheitsgrade in jedem Knoten des Elements beinhalten sowohl die Translation als auch die Rotation in Richtung bzw. um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse.
- Die Shell181-Elemente sind für die Analyse von dünnen bis mäßig dicken Flächentragwerken geeignet.
- Die Formulierung des Elements entspricht der Mindlin-Reissner-Schalentheorie und ist für die Beschreibung von mehrschichtigen Laminaten aus Verbundwerkstoffen empfehlenswert.
- Die Modellierung von Laminaten aus Verbundwerkstoffen wird über diese Schalenelemente durch die Schubdeformationstheorie erster Ordnung geregelt.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden über numerische Integration ermittelt. Hierfür kann die volle und die reduzierte Integration verwendet werden. Bei einem 4-Knoten-Element werden vier Integrationspunkte benötigt, um die Steifigkeiten berechnen zu können.

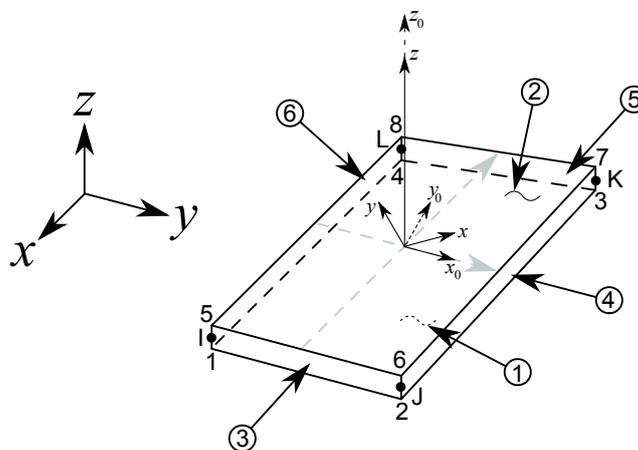


Abb. 4.23: Shell181 Schalenelement.

Elemente mit voller Integration können unerwünschte Effekt hervorrufen, wie z.B. Schub- oder Volumen-Locking. Diese Locking-Effekte neigen dazu, vernetzte Strukturen zu sperren, und generieren oftmals ein zu steifes Verhalten.

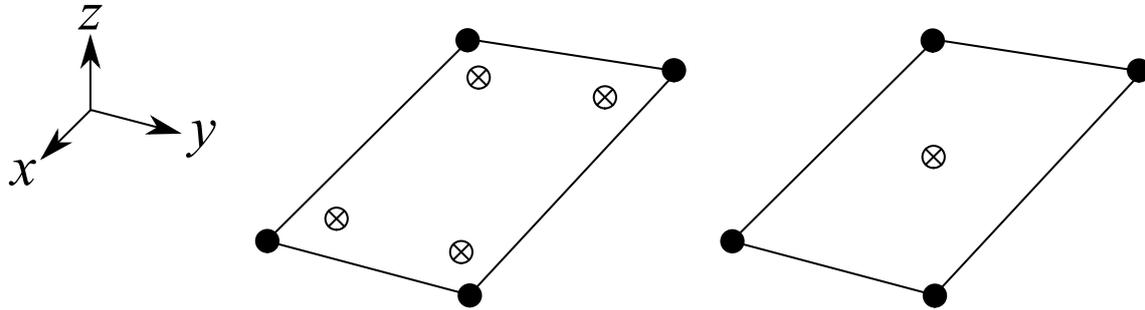


Abb. 4.24: Integrationspunkte beim Shell-Element, volle Integration (links), reduzierte Integration (rechts).

Reduzierte Integration hingegen erfordert für die Auswertung der Steifigkeitsmatrizen nur den Elementschwerpunkt. Dementsprechend können Locking-Effekte in den Elementen vermindert werden. Neben den Vorteilen wie die Verringerung der Laufzeit einer FE-Rechnung besteht bei der reduzierten Integration die Gefahr, dass sich in den Elementen ein Nullenergiemodus einstellt. Dieser kinematische Modus wird in der Fachliteratur als Sanduhrmodus bezeichnet. Möglicherweise können bei der Verwendung von Elementen mit reduzierter Integration die kalkulierten Dehnungen am Elementschwerpunkt gleich Null sein. Tritt dieses Phänomen ein, können ungesteuerte Störungen in der Vernetzung auftreten. In dieser Arbeit wird zunächst die reduzierte Integration angewandt, der Sanduhrfehler konnte jedoch festgestellt werden. Aus diesem Grund werden die weiteren Rechnungen mit voller Integration durchgeführt.

Die FE-Methode kann nicht auf direktem Weg die Ergebnisse für die effektiven Steifigkeiten ausgeben. Demzufolge werden analytische Formeln aus der Bernoulli-Balkentheorie verwendet. Über diese analytischen Gleichungen lassen sich über Verschiebungen bzw. Verdrehungen an einer bestimmten Stelle der Struktur die gesuchten effektiven Steifigkeiten eines Composite-Balkens bestimmen. Leider gibt es keine bekannte Möglichkeit, alle zehn effektiven Steifigkeiten einer allgemeinen Steifigkeitsmatrix zu ermitteln. Es können nur für die folgenden effektiven Steifigkeiten Lösungen über die FEM gefunden werden:

- effektive Dehnsteifigkeit  $\rightarrow \widehat{EA}$
- effektive Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse  $\rightarrow \widehat{EI}_{yy}$
- effektive Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse  $\rightarrow \widehat{EI}_{zz}$
- effektive Torsionssteifigkeit  $\rightarrow \widehat{GI}_t$ .

Es werden Standardexperimente wie z.B. der Zugversuch mit der Finite-Elemente-Methode nachkonstruiert. Im Folgenden werden für die effektiven Steifigkeiten ein FEM-Modell mit den dazugehörigen Randbedingungen und Einwirkungen dargestellt und erläutert. Zusätzlich werden einige Ergebnisse präsentiert, um die geschlossen-analytischen Lösungen zu verifizieren.

### Effektive Dehnsteifigkeit $\widehat{EA}$

Für den Querschnitt eines I-Trägers werden insgesamt sieben Knotenpunkte benötigt. In diesem Abschnitt soll die Laminat-Konfiguration B als Basis verwendet werden. Die Koordinatenwerte im  $x$ - $y$ - $z$ -System können aus der Abb. 4.25 entnommen werden. Diese Punkte werden über sechs Linien miteinander verbunden. Die Linien liegen auf der Mittelebene eines jeden Balkensegments und bilden den Querschnitt des Trägers. Für die Balkenlänge  $L$  soll ein Wert von 4,5 m angenommen werden. Um die Einzelflächen des I-Trägers zu erstellen, werden sowohl die erwähnten Knotenpunkte als auch die Linien erstellt, die jedoch mit einem Abstand von  $L$  in  $x$ -Richtung versehen werden. Zwischen diesen beiden Linienquerschnitten werden zusätzlich Linienverbindungen erzeugt. Folglich können die benötigten Flächen zwischen den Linien generiert werden.

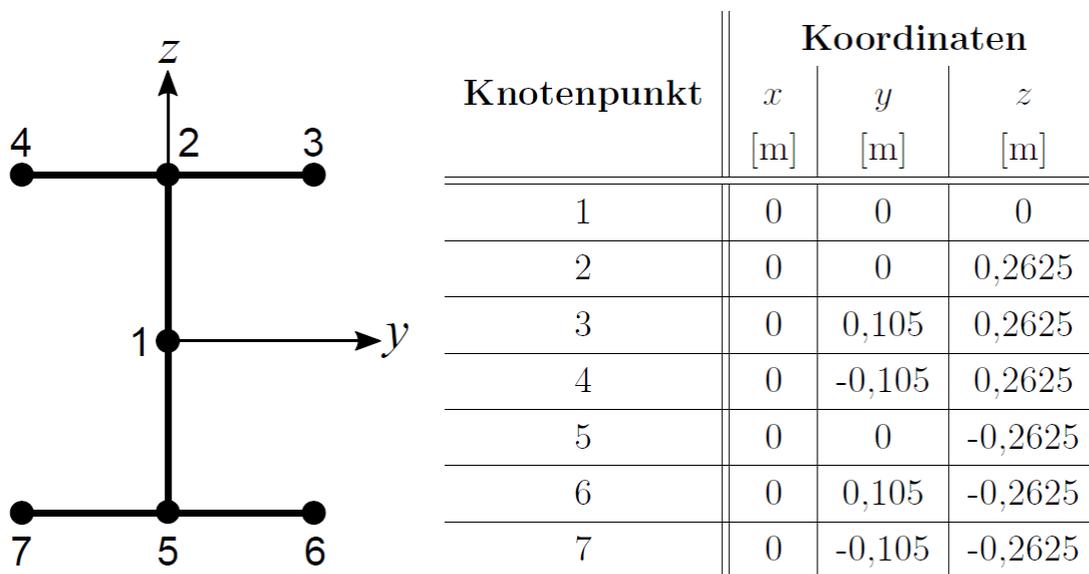


Abb. 4.25: Darstellung des untersuchten Querschnitts.

Nun werden für die produzierten Flächen sowohl die Materialeigenschaften als auch die Lagenaufbauten zugewiesen. Nach der Geometrierzeugung wird das komplette Modell mit Shell181-Elementen vernetzt.

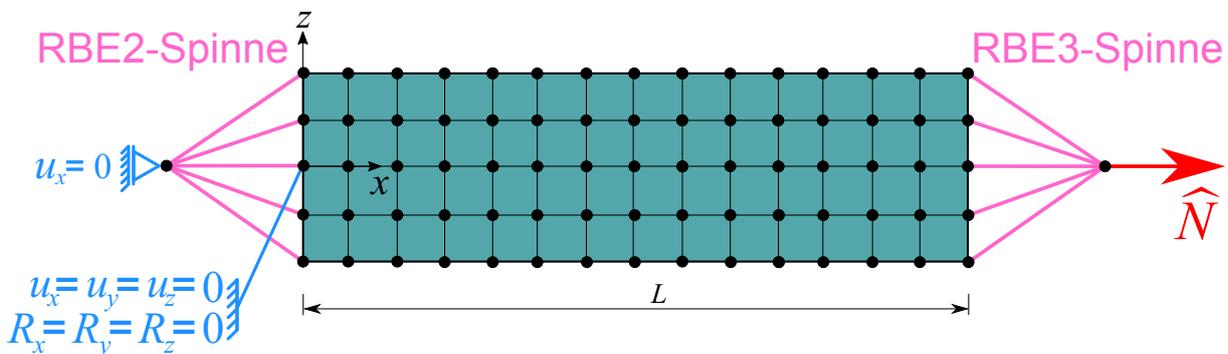


Abb. 4.26: Darstellung der Randbedingungen und Einwirkungen für einen Zugversuch in der FEM.

Im nächsten Schritt werden die Randbedingungen des Zugversuchs angebracht. Hierbei werden für alle Knotenpunkte am Rand  $x = L$  mithilfe einer RBE2-Spinne die translatorischen Verschiebungen in  $x$ -Richtung blockiert (siehe Abbildung 4.26). Hierbei wird zwischen der RBE2- und RBE3-Spinne unterschieden. Eine RBE2-Spinne besitzt steife Übertragungseigenschaften und ist für die Anbringung von Lagerungen bzw. Randbedingungen geeignet. Elastische Eigenschaften der Verbindung zwischen den verbundenen Knoten sind mithilfe der RBE3-Spinne gewährleistet. Sie werden für die Aufbringung von Einwirkungen bzw. Lasten empfohlen. Zusätzlich werden beim Knotenpunkt 1, der den Schwerpunkt des Querschnitts symbolisiert, alle sechs Freiheitsgrade gleich Null gesetzt. Der Composite-Balken soll nun über eine Einzellast gezogen werden. An dieser Stelle wird ein sogenannter Masterknoten erstellt, der einen bestimmten Abstand zum äußeren rechten Rand besitzt. Die Koordinaten  $y$  und  $z$  für diesen Masterknoten sind gleich Null. An diesem Knoten wird die Normalkraft  $\hat{N}$  angebracht. Der Masterknoten wird über eine RBE3-Spinne mit allen Knoten des Querschnitts bei  $x = L$  verbunden. Mithilfe dieser Spinne werden die Normalkräfte auf die gewählten Knotenpunkte verteilt. Dementsprechend wird eine gleichmäßige Verteilung der Belastung auf den Querschnitt gewährleistet. Unter Verwendung des oben angeführten Modells soll nun die effektive Dehnsteifigkeit  $\widehat{EA}$  ermittelt werden. Dazu wird die analytische Formel für die Dehnung  $\varepsilon$  eines linearen Balkens angewandt [118]. Es gilt:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\hat{N}}{\widehat{EA}}. \quad (4.86)$$

Für  $\widehat{EA}$  entsteht folgender Ausdruck:

$$\widehat{EA} = \hat{N} \frac{L}{\Delta L}, \quad (4.87)$$

wobei  $\Delta L$  die elastische Längenänderung des Balkens repräsentiert. Führt man nun eine statische Berechnung des FEM-Modells durch, erhält man aus dem Post-Processing von ANSYS für die Längenänderung einen Wert von  $\Delta L = 0,348 \cdot 10^{-5} \text{m}$ . Setzt man diesen Wert in die Gleichung (4.87) ein, ergibt sich bei einer Balkenlänge von  $L = 4,5 \text{m}$  und einer Normalkraft von  $\hat{N} = 1000 \text{N}$  folgendes Ergebnis für die effektive Dehnsteifigkeit  $\widehat{EA}$ :

$$\widehat{EA} \rightarrow \widehat{EA}_{FE} = 1000 \text{N} \frac{4,5 \text{m}}{0,348 \cdot 10^{-5} \text{m}} \rightarrow \widehat{EA}_{FE} = 1293103448 \text{N}. \quad (4.88)$$

Im Vergleich zur analytischen Lösung, die einen Wert von  $\widehat{EA} = 1322438392 \text{N}$  besitzt, kann ein absoluter Unterschied von 2,22 % ermittelt werden. In Abbildung 4.27 wird der Composite-Balken sowohl im Ruhezustand als auch im verformten Zustand wiedergegeben. Hierbei ist der verformte Zustand mit einem bestimmten Faktor skaliert, um einen visuellen Unterschied zwischen den beiden Zuständen zu generieren. Um mehrere Ergebnisse für die effektive Dehnsteifigkeit aus der FEM zu erhalten, wurde eine Vielzahl von Rechnungen mit unterschiedlichen Balkenlängen gestartet.

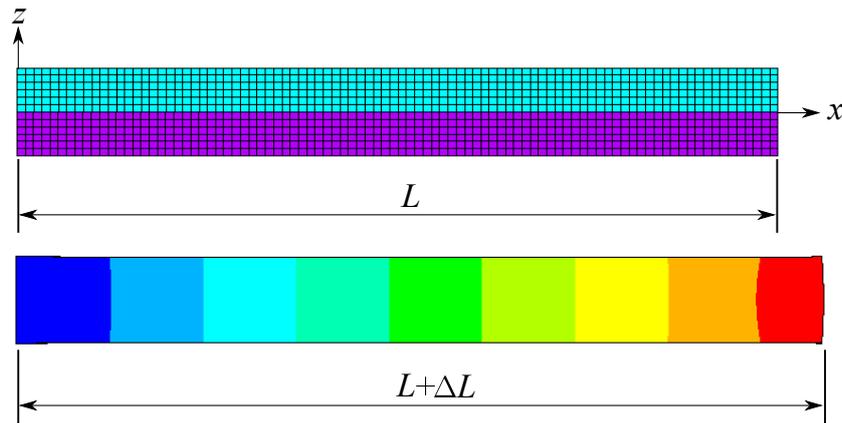


Abb. 4.27: Verschiebung des Composite-Balkens infolge Normalkraft.

Hierbei wird die Länge des Balkens in einem Intervall von 1 m bis 10 m verwendet, wobei die Einzelschritte 0,25 m betragen. In Abbildung 4.28 sind die effektiven Dehnsteifigkeiten über die Länge des Balkens für alle drei Laminat-Konfigurationen dargestellt, wobei die analytischen Lösungen mit den FE-Lösungen verglichen werden.

Die Ergebnisse aus den hergeleiteten geschlossen-analytischen Lösungen der Balkenstruktur weisen für alle drei Laminat-Konfigurationen konstante Werte auf. Dementsprechend hängt die theoretische effektive Dehnsteifigkeit nicht von der Balkenlänge  $L$  ab (siehe Abbildung 4.28). Anhand der numerischen Ergebnisse aus FEM ist zu erkennen, dass die effektive Dehnsteifigkeit sich über die Balkenlänge verändert. Interessant zu sehen ist, dass die FEM-Lösungen mit steigender Länge gegen die dazugehörige Konstante analytische Lösung konvergieren. Im Allgemeinen bedeutet dies, dass die FE-Ergebnisse bei dieser Methode bei kleinen Längen falsche bzw. ungenaue Lösungen liefern. Bei einer Länge von  $L = 1 \text{ m}$  können sich Abweichungen von bis zu 20 % einstellen. Einen absoluten Fehler von 2,22 % stellt sich schon bei einer Balkenlänge von  $L = 4,5 \text{ m}$  ein. Dieses Ergebnis ist als ingenieurpraktisch ausreichend genau einzuschätzen. Dieses Verhalten der effektiven Dehnsteifigkeit kann bei allen drei untersuchten Laminat-Konfigurationen beobachtet werden. Wichtig zu erwähnen ist, dass die verwendete Methode zum Vergleich der Analytik und der Numerik fehleranfällig ist, weil zum einen die analytischen Lösungen auf der Balkentheorie basieren. Es nur werden eindimensionale Elemente betrachtet. Zum anderen werden für die FE-Berechnung zweidimensionale Schalenelemente eingesetzt. Des Weiteren werden die Lösungen (hier Verschiebungen bzw. Verdrehungen) aus der 2D-FE-Modellierung in die Balkentheorie erster Ordnung eingesetzt, um Ergebnisse für die effektiven Steifigkeiten zu generieren.

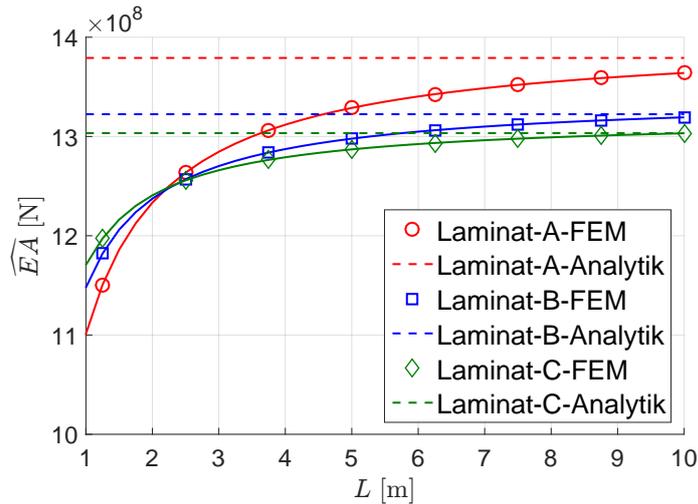


Abb. 4.28: Vergleich der Analytik mit der Numerik für die effektive Dehnsteifigkeit.

Trotz dieser Vereinfachungen zeigen sich gute Ergebnisse aus der Analytik, die sich mit den FE-Lösungen verifizieren lassen.

### Effektive Biegesteifigkeit um die $y$ -Achse $\widehat{EI}_{yy}$

Für die effektive Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse werden die gleichen Schritte für die Geometrieerzeugung verwendet wie beim FE-Modell des Zugversuchs, wobei ein zusätzlicher Querschnitt an einer bestimmten Länge des Balkens hinzugefügt wird. Dieser Querschnitt entspricht einer Balkenlänge von  $L(w_{max}) = \frac{L}{\sqrt{3}}$ , weil an dieser Stelle die maximale Verschiebung auftritt. Diese maximale Deformation wird für die analytische Formel der Biegelinie benötigt, um Ergebnisse für die effektive Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  zu generieren. Bevor die Gleichung der maximalen Durchbiegung verwendet wird, sollen die Einwirkungen und Randbedingungen des FEM-Modells besprochen werden. An den beiden äußeren Rändern

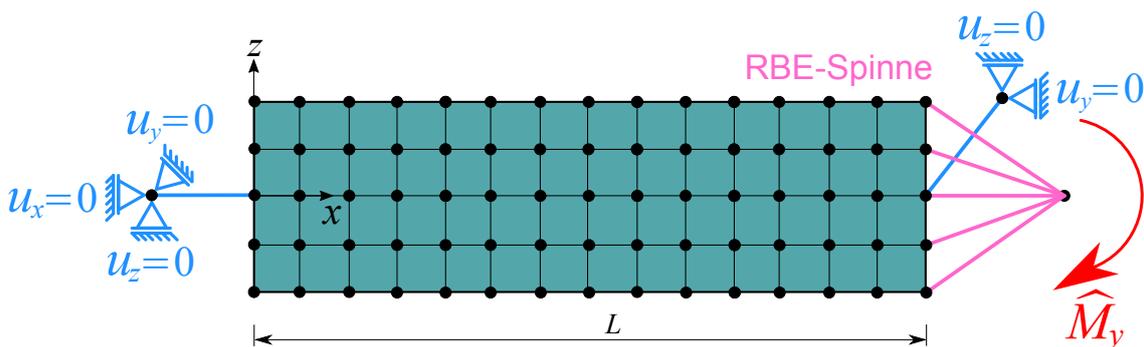


Abb. 4.29: Darstellung der Randbedingungen und Einwirkungen für den Biegeversuch um die  $y$ -Achse in der FEM.

( $x = 0$  und  $x = L$ ) werden im Schwerpunkt des Querschnitts die Verschiebung sowohl in  $y$ - als auch in  $z$ -Richtung blockiert. Zusätzlich wird der translatorische Freiheitsgrad in der  $x$ -Richtung am Schwerpunkt  $x = 0$  gleich Null gesetzt (siehe Abbildung 4.29). Für die Lasteinwirkung wird wieder ein Masterknoten eingeführt, der sich an derselben Stelle befindet wie beim Zugversuch. Wie zuvor wird dieser Knoten mit den Knotenpunkten am

äußeren Querschnitt  $x = L$  mit einer RBE3-Spinne verbunden. Am Masterknoten wird ein reines Biegemoment um die  $y$ -Achse angebracht. Mit dieser Konstellation wird eine Biegung um die  $y$ -Achse ausgelöst und folglich eine Verschiebung des Composite-Balkens in der  $z$ -Richtung erzeugt.

Nun sollen die Verschiebungslösungen aus der FEM verwendet werden, um die effektive Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse zu ermitteln. Die analytische Gleichung für die maximale Verschiebung eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens unter einem reinen Biegemoment, das am Ende  $x = L$  angreift, kann wie folgt beschrieben werden [118]:

$$w_{max} = \frac{\widehat{M}_y L^2}{9\sqrt{3}\widehat{EI}_{yy}}. \quad (4.89)$$

Umgeformt nach  $\widehat{EI}_{yy}$

$$\widehat{EI}_{yy} = \frac{\widehat{M}_y L^2}{9\sqrt{3}w_{max}}, \quad (4.90)$$

wobei  $\widehat{M}_y$  das Biegemoment um die  $y$ -Achse darstellt und  $w_{max}$  die maximale Durchbiegung beschreibt. Für das Biegemoment wird bei einer Balkenlänge von 4,5 m ein Wert von  $\widehat{M}_y = 1000Nm$  verwendet. Nach einer statischen Berechnung des beschriebenen FE-Modells kann eine maximale Verschiebung von  $w_{max} = 0,176m \cdot 10^{-4}$  festgestellt werden. Wird dieses Ergebnis in die Gleichung (4.90) eingesetzt, kann für die effektive Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  folgender Wert errechnet werden:

$$\widehat{EI}_{yy} \rightarrow \widehat{EI}_{yy,FE} = \frac{\widehat{M}_y L^2}{9\sqrt{3}w_{max}} = \frac{1000Nm (4,5m)^2}{9\sqrt{3} \cdot 0,176m \cdot 10^{-4}} \rightarrow \widehat{EI}_{yy,FE} = 73808983Nm^2. \quad (4.91)$$

Bei einem Vergleich der theoretischen Lösung mit dem FE-Ergebnis kann eine Abweichung

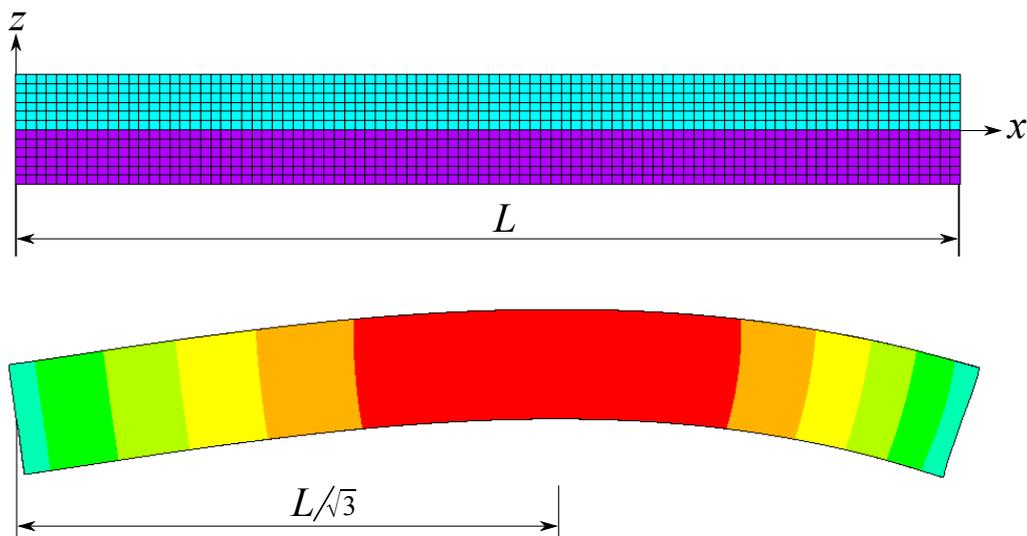


Abb. 4.30: Verschiebung des Composite-Balkens infolge Biegung um die  $y$ -Achse.

von 1,81 % festgestellt werden. Die durch die Einwirkung entstehende Durchbiegung ist in der Darstellung 4.30 abgebildet.

In Abbildung 4.30 ist zu erkennen, dass die maximale Durchbiegung sich nicht in der Mitte befindet, sondern sich bei einer Länge von  $L = \frac{L}{\sqrt{3}}$  einstellt. Auch für die effektive Biegesteifigkeit ergibt die analytische Gleichung eine Lösung, die unabhängig von der Balkenlänge  $L$  ist.

In Abbildung 4.31 werden die theoretischen Lösungen mit den numerischen Lösungen aus der FEM miteinander verglichen. Auch in dieser Abbildung ist eine Veränderung der effektiven Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  über die Länge des Balkens festzustellen. Jedoch konvergieren die Lösungen aus der FEM relativ früher als bei der effektiven Dehnsteifigkeit. Einerseits liefert die Numerik relativ unbefriedigende Ergebnisse bei Balkenlängen bis zu 1 m. Andererseits entstehen schon bei Längen von 2 m Abweichungen, die nicht höher sind als 7 %.

**Effektive-Biegesteifigkeit um die y-Achse über die Länge eines I-Profil Balkens für die Laminat-Konfigurationen A, B & C**

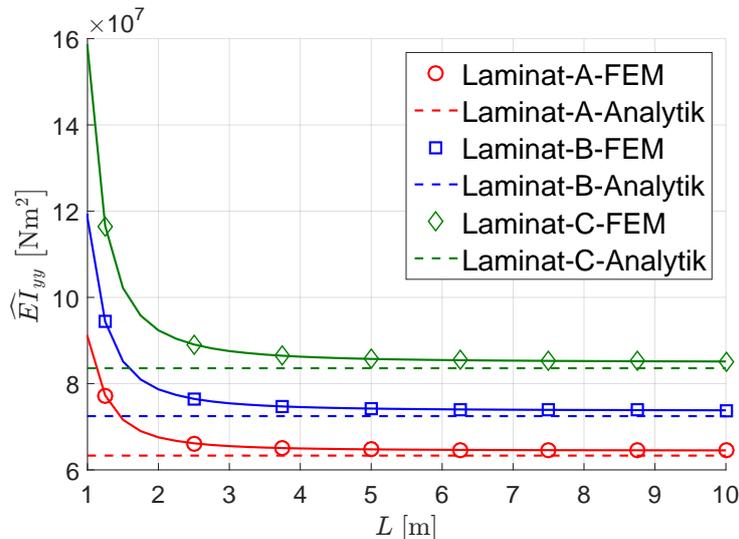


Abb. 4.31: Vergleich der Analytik mit der Numerik für die effektiven Biegesteifigkeiten, effektive Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse.

Abbildung 4.31 zeigt, dass für alle untersuchten Laminat-Konfigurationen die Verhaltensweisen ähnliche Effekte hervorrufen. Die geringen Unterschiede zwischen den Lösungen der

**Effektive-Biegesteifigkeit um die z-Achse über die Länge eines I-Profil Balkens für die Laminat-Konfigurationen A, B & C**

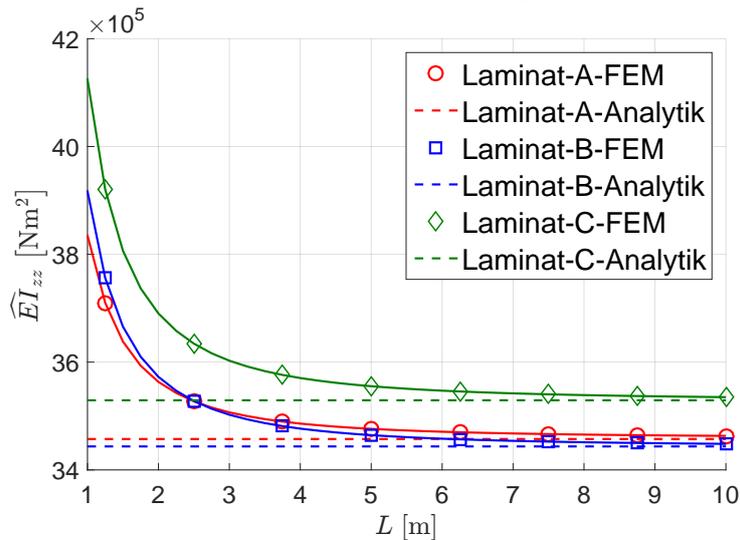


Abb. 4.32: Vergleich der Analytik mit der Numerik für die effektiven Biegesteifigkeiten, effektive Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse.

Analytik und Numerik ab Balkenlänge von  $L = 5 \text{ m}$  sind auf die verwendeten Methoden zurückzuführen.

Für die effektive Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse lässt sich dasselbe Modell verwenden, das für die Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{yy}$  beschrieben wurde. Jedoch muss die Einwirkung von einem Biegemoment um die  $y$ -Achse zu einem Moment um  $z$ -Achse editiert werden. Die definierten Randbedingungen an den jeweiligen äußeren Knoten, die sich im Schwerpunkt befinden, bleiben unverändert. Auch die Ergebnisse der effektiven Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse weisen ähnliche Verhaltensmuster wie beim ersten Biegeversuch auf. Die FEM-Ergebnisse konvergieren in gleicher Weise mit steigender Länge gegen die analytischen Lösungen.

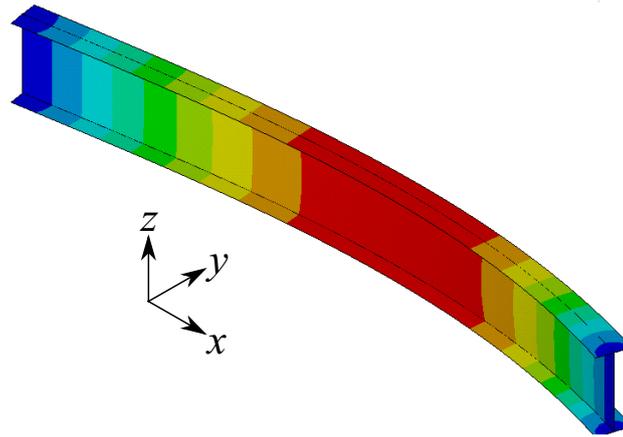


Abb. 4.33: Verschiebung des Composite-Balkens infolge Biegung um die  $z$ -Achse.

Ebenfalls tritt bei diesem Versuch die maximale Verschiebung, die jetzt eine Ausdehnung in der  $y$ -Richtung aufweist (siehe Abbildung 4.33) bei einer Länge von  $L = \frac{L}{\sqrt{3}}$  ein. Für die Laminat-Konfiguration B stellt sich bei einer Balkenlänge von  $L = 4,5 \text{ m}$  eine maximale Deformation von  $w_{max} = 3,81 \text{ m} \cdot 10^{-3}$  ein. Für die effektive Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}_{zz}$  kann folgender Wert berechnet werden:

$$\widehat{EI}_{zz} \rightarrow \widehat{EI}_{zz,FE} = \frac{\widehat{M}_z L^2}{9\sqrt{3}w_{max}} = \frac{1000 \text{ Nm} (4,5 \text{ m})^2}{9\sqrt{3} \cdot 3,81 \text{ m} \cdot 10^{-4}} \rightarrow \widehat{EI}_{zz,FE} = 3409549 \text{ Nm}^2. \quad (4.92)$$

im Vergleich zu der analytischen Lösung kann eine geringe Differenz von 0,99 % festgelegt werden.

### Effektive Torsionssteifigkeit $\widehat{GI}_t$

Abschließend soll die analytisch ermittelte effektive Torsionssteifigkeit  $\widehat{GI}_t$  mit der FEM bestätigt werden. Für die Geometrierzeugung wurden die identischen Schritte angewandt wie bei den zuvor untersuchten Modellen.

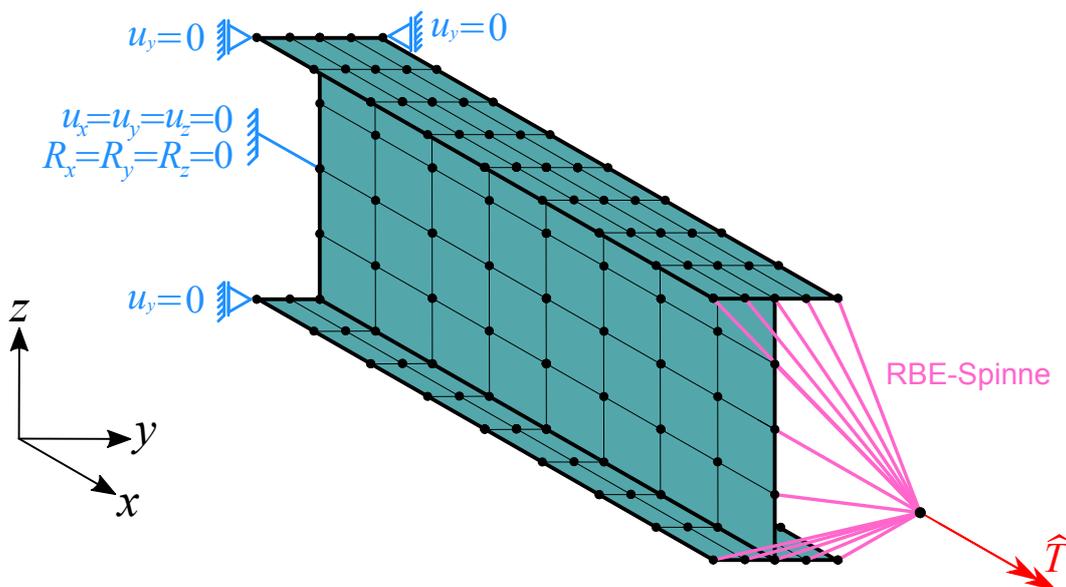


Abb. 4.34: Darstellung der Randbedingungen und Einwirkungen für den Torsionsversuch in der FEM.

Bei diesem Fall wird keine Verschiebung, sondern eine Verdrehung aus der FEM angenommen. Der Composite-Balken wird mit einem Torsionsmoment um die Schwerpunktsachse belastet (siehe Abbildung 4.34). Für die Anbringung des Torsionsmoment ins FE-Modell wird wiederholt ein Masterknoten verwendet. Über eine RBE3-Spinne werden die Knoten auf dem Rand  $x = L$  mit dem Masterknoten verknüpft. Dementsprechend wird eine gleichmäßige Verteilung der Last auf die Struktur generiert. Für die Randbedingungen wird eine Gabellagerung am Rand  $x = 0$  angebracht. Infolgedessen werden die Verschiebung in  $y$ -Richtung der Knotenpunkte 3, 4, 6 und 7 blockiert. Die Gabellagerung sorgt dafür, dass keine Wölbspannungen entstehen. Die durch Verwölbungen hervorgerufenen Verschiebungen in Richtung der  $x$ -Koordinate können sich durch die Gabellagerung frei bewegen. Des Weiteren werden sowohl die translatorischen als auch die rotatorischen Freiheitsgrade des Knotens bei  $x = 0$  im Schwerpunkt gleich Null gesetzt.

Mithilfe der maximalen Verdrehung lässt sich die gesuchte effektive Torsionssteifigkeit  $\widehat{GI}_t$  über die folgende Formel ermitteln [118]:

$$\widehat{GI}_t = \frac{\widehat{T}L}{\vartheta}, \quad (4.93)$$

wobei  $\vartheta$  die Verdrehung ist und in Bogenmaß gerechnet wird. Über die FE-Berechnung des erstellten Modells kann eine maximale Verdrehung um die  $x$ -Achse am Rand  $x = L$  festgestellt werden. Mit einem Torsionsmoment von 1000 Nm und einer Balkenlänge von 4,5 m ergibt sich für die Verdrehung ein Wert von 0,075 rad. Umgerechnet in Grad erhält man  $\vartheta = 4,3^\circ$ . Eingesetzt in die Formel (4.93) kann folgende effektive Torsionssteifigkeit, die auf der FEM basiert, ermittelt werden:

$$\widehat{GI}_t \rightarrow \widehat{GI}_{t,FE} = \frac{1000Nm(4,5m)^2}{0,075rad} \rightarrow \widehat{GI}_{t,FE} = 60039Nm^2. \quad (4.94)$$

Die Analytik hingegen ergibt einen Wert von  $\widehat{GI}_t = 63971Nm^2$ . Es kann zwischen Analytik und Numerik ein Unterschied von 4,91 % diagnostiziert werden. Der verformte Zustand des I-Trägers in der  $yz$ -Ebene zeigt, dass sich eine reine Verdrehung des Querschnitts um die  $x$ -Achse bzw. um die Schwerpunktsachse einstellt. In der isometrischen Darstellung der FE-Lösung (siehe Abbildung 4.35 b), ist zu erkennen, dass sich eine maximale Verdrehung am Randende  $x = L$  einordnet.

In der Darstellung 4.36 sind die effektiven Torsionssteifigkeiten über die Balkenlänge abgebildet. Es werden von den Laminat-Konfigurationen A, B und C die analytischen Ergebnisse mit den in der FEM generierten Lösungen verglichen. Auch hier ist zu erkennen, dass die FEM mit steigender Länge gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Die analytischen Lösungen der effektiven Torsionssteifigkeiten sind unabhängig von der Balkenlänge und dementsprechend konstant.

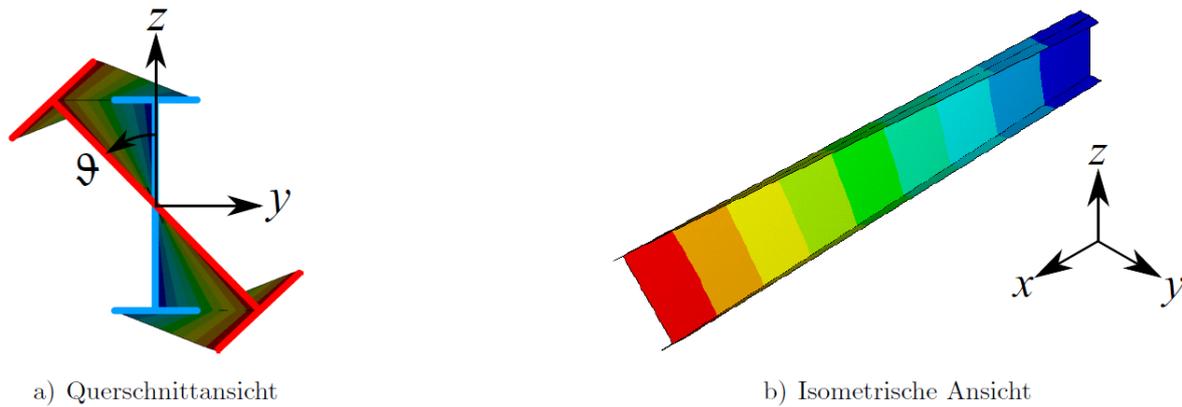


Abb. 4.35: Verdrehung des Composite-Balkens infolge der Torsion.

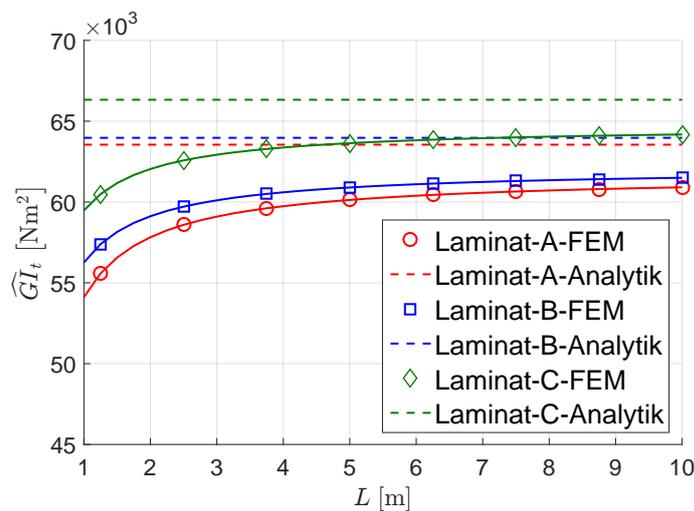


Abb. 4.36: Vergleich von Analytik und Numerik für die effektive Torsionsteifigkeit.

Bei kürzeren Längen können Unterschiede von bis zu 15 % zwischen den Ergebnissen ermittelt werden. Jedoch stellen sich bereits bei Balkenlängen von 2 m Differenzen von 8,5 % ein. Für relativ große Balken entstehen Diskrepanzen von nur noch 3 bis 4 %. Diese Fehlerwerte lassen zum einen damit erklären, dass die verwendete Analytik sich auf die Balkentheorie bezieht, wobei für die FE-Berechnung zweidimensionale Elemente verwendet werden.

Des Weiteren wird bei der Analytik für die Ermittlung des konstitutiven Materialgesetzes die klassische Laminattheorie herangezogen. ANSYS hingegen verwendet mit seinen Schalenelementen die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung. Zum anderen kann auch die Umsetzung von einfachen Balkenproblemen in die FEM fehlerhaft sein. Ungenauigkeiten können bei den definierten Randbedingungen oder Einwirkungen bis zur Erstellung der Geometrien auftreten. Angesichts der erwähnten Einflüsse konnten trotzdem relativ vielversprechende Ergebnisse für die effektiven Steifigkeiten ermittelt werden.

**Effektive Wölbsteifigkeit  $\widehat{EI}_\omega$** 

Für eine geschlossen-analytische Form der globalen Stabilitätsprobleme von Träger, die aus Verbundwerkstoffen bestehen, werden neben den zuvor validierten effektiven Steifigkeiten Informationen zur Wölbsteifigkeit  $\widehat{EI}_\omega$  benötigt. In Abbildung 4.37 ist die schematische Verwölbung eines I-Profiles unter einem Torsionsmoment  $\widehat{T}$  dargestellt.

In dieser Arbeit wurde nach allgemeinen Lösungswegen der effektiven Wölbsteifigkeit gesucht. Leider wurden nur Lösungen für orthotrope Balkenstrukturen gefunden. Aus Zeitgründen wurde auf eine nähere Recherche bzw. Untersuchung der Wölbsteifigkeit  $\widehat{EI}_\omega$  verzichtet. Die Wölbsteifigkeit wird benötigt um Ergebnisse für die globale Stabilität von Composite-Strukturen darzustellen. Aus diesem Grund wurden für alle betrachteten Querschnittformen provisorisch die Lösungen von orthotropen Balken verwendet. In der nachfolgenden Tabelle sind die geschlossen-analytischen Gleichungen der effektiven Wölbsteifigkeit  $\widehat{EI}_\omega$ , die ursprünglich nur für orthotrope Balkensegmente gelten, für alle in dieser Arbeit untersuchten Querschnittsformen dargestellt.

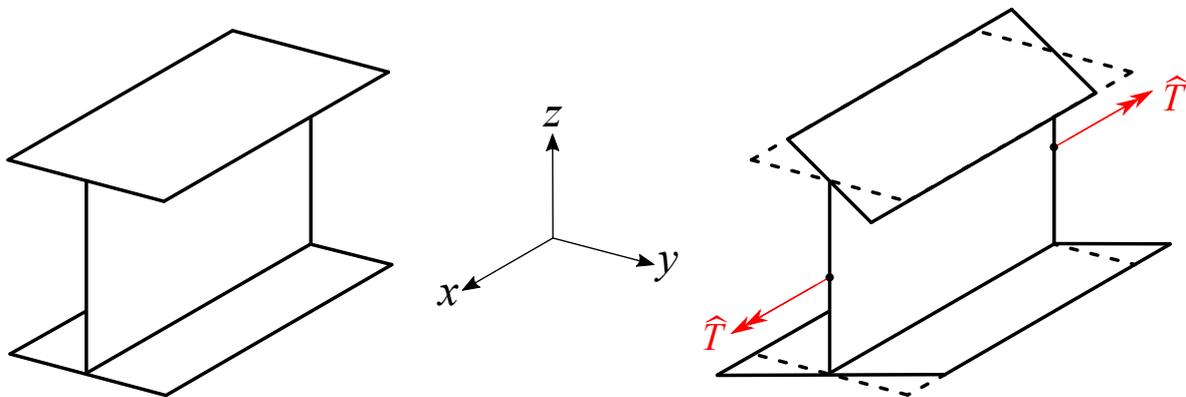
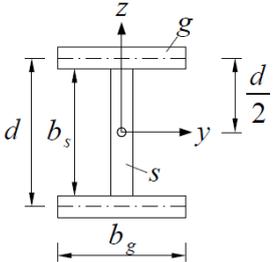
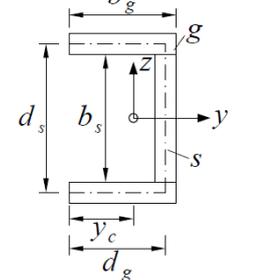
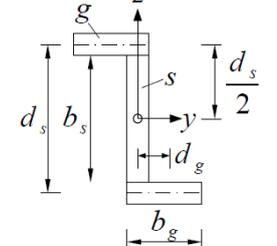
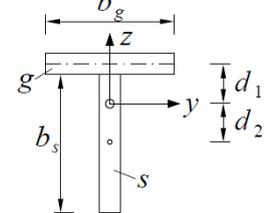
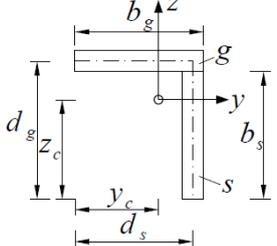
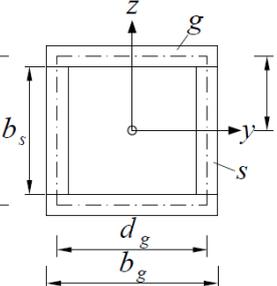


Abb. 4.37: Verwölbung eines I-Profiles unter einem Torsionsmoment  $\widehat{T}$ .

Diese Lösungen stammen aus [119]. Für weitere Informationen über die Wölbsteifigkeit können die Werke [119] und [120] verwendet werden.

Querschnittsform	Effektive Wölbsteifigkeit
	$\widehat{EI}_\omega = \frac{1}{(\alpha_{11})_g} \frac{d^2 b_g^3}{24}$
	$\widehat{EI}_\omega = \frac{d_s^2 b_g^3}{12(\alpha_{11})_g} \frac{3b_g^3}{(\alpha_{11})_g} + \frac{2d_s}{(\alpha_{11})_s} + \frac{6b_g}{(\alpha_{11})_g} + \frac{d_s}{(\alpha_{11})_s}$
	$\widehat{EI}_\omega = \frac{d_s^2 b_g^3}{12(2b_g + d_s)^2} \left( 2 \frac{(b_g^2 + b_g d_s + d_s^2)}{(\alpha_{11})_g} + 3 \frac{b_g d_s}{(\alpha_{11})_s} \right)$
	$\widehat{EI}_\omega = 0$
	$\widehat{EI}_\omega = 0$
	$\widehat{EI}_\omega \approx 0$

# Kapitel 5

## Globale Stabilität von Faserverbundträgern

### 5.1 Globale Stabilitätsprobleme

Nach der Herleitung der Steifigkeitsmatrix von Composite-Trägern soll nun die Theorie von globalen Stabilitätsproblemen unter dem Einsatz von Verbundwerkstoffen analysiert werden. Versagt eine Struktur bzw. ein Bauteil durch eine Lastaufnahme, ohne dass die zulässige Werkstoffbeanspruchung überschritten wird, spricht man von sogenannten Stabilitätsproblemen. Hierbei versagt das Bauteil nicht aus materialspezifischen Gründen wie bei Festigkeitsproblemen, sondern es weicht zur Seite aus und verliert hierbei die Stabilität. Dieses Phänomen tritt häufig bei leichtbaugerechten Bauteilen auf.

Für isotrope Werkstoffe kann eine Vielzahl von Literaturquellen gefunden werden, in denen das Stabilitätsproblem ausführlich hergeleitet und dargestellt wird. Für nähere Informationen können [121-131] als Nachschlagwerke herangezogen werden. Auch für Verbundwerkstoffe gibt es einige Werke, die sich mit dem Stabilitätsproblem von Trägern auseinandersetzen haben, wobei sich die Autoren hauptsächlich auf orthotrope Lagenaufbauten und auf symmetrische Querschnitte beschränken.

In dieser Arbeit sollen nun geschlossen-analytische Lösungen hergeleitet werden, die das Stabilitätsproblem von Composite-Trägern beschreiben. Um die Theorien für den Einsatz von Verbundwerkstoffen zu erweitern, werden die in Kapitel 4 hergeleiteten Steifigkeitswerte in die betrachteten Theorien eingesetzt. Die folgenden Ausführungen wurden aus [121] adaptiert und für Träger, die aus Verbundwerkstoffen bestehen, weiterentwickelt.

#### 5.1.1 Biegeknicken

In diesem Abschnitt wird das elastische Biegeknicken von Composite-Trägern dargestellt. Dieses Stabilitätsproblem, auch Euler-Knicken genannt, wurde ausführlich von Leonhard Euler untersucht. Hierbei wird eine stabförmige Struktur betrachtet, die über die Gesamtlänge eine konstante Biegesteifigkeit  $\widehat{EI}$  aufweist. Als Lasteinwirkung wird eine Druckbelastung angenommen, die im Schwerpunkt angreifen soll. Diese Drucklast, in Folgenden mit  $\widehat{N}$  gekennzeichnet, wird auf die betrachtende Struktur aufgebracht und erzeugt zunächst entlang der Längsachse eine Verformung, wobei die Gleichgewichtslage im stabilen Bereich liegt. Wird nun die beanspruchte Struktur entlastet, geht die Struktur in ihre

Ursprungsposition zurück. Beim Erreichen der kritischen Last  $\widehat{N}_{cr}$  wird im Verzweigungspunkt ein indifferenter Gleichgewichtszustand erreicht, der zuvor im stabilen Gleichgewicht stand. In diesem Zustand ist eine Längsverschiebung immer noch möglich, ohne dass eine Auslenkung der Struktur auftritt. Bereits kleinste Störungen dieses Zustands führen zu einer Auslenkung und die Struktur würde durch ein Knicken versagen. Tritt solch eine Störung hervor, erreicht die Struktur eine neue Gleichgewichtslage, wobei die Last als überkritisch einzuordnen ist. Die ausgelenkte Konfiguration hingegen ist stabil.

Zur Ermittlung der kritischen Kraft wird die Gleichgewichtsmethode herangezogen. Hierfür wird die Struktur infinitesimal seitlich ausgelenkt. Nun kann der infinitesimal zum Verzweigungspunkt benachbarte Gleichgewichtszustand betrachtet werden (siehe Abbildung (5.1)). In diesem Zustand wirken die gleichen Reaktionskräfte wie unmittelbar vor dem Verzweigungspunkt. Anhand der Auslenkung der Struktur kann ein Gleichgewichtszustand abgeleitet und dargestellt werden. Zusätzlich zur Kraft  $\widehat{N}$  entsteht im Schnitt ein Biegemoment  $\widehat{M}_y$ , das im verformtem Zustand wirken muss (siehe Abbildung (5.1)). Die aufgebrachte Last  $\widehat{N}$  wirkt stets parallel zur ursprünglichen belasteten Schwerpunktschse des Stabes. Aus dem Momentengleichgewicht um die  $y$ -Achse kann das Biegemoment  $\widehat{M}_y(x)$  aus der benachbarten Gleichgewichtslage formuliert werden:

$$\sum_i \widehat{M}_{iy} = 0 \iff 0 = \widehat{M}_y(x) - \widehat{N}w(x). \quad (5.1)$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie zweiter Ordnung ist folgendermaßen definiert:

$$w''(x) = -\frac{\widehat{M}_y(x)}{\widehat{EI}_{yy}}, \quad (5.2)$$

umgeformt nach dem Biegemoment:

$$\widehat{M}_y(x) = -\widehat{EI}_{yy}w''(x), \quad (5.3)$$

kann folgende homogene Differentialgleichung dargestellt werden:

$$0 = -\widehat{EI}_{yy}w''(x) - \widehat{N}w(x) \iff 0 = w''(x) + \frac{\widehat{N}}{\widehat{EI}_{yy}}w(x). \quad (5.4)$$

Für eine übersichtliche Darstellung wird die Substitution  $\zeta^2 = \frac{\widehat{N}}{\widehat{EI}_{yy}}$  angewandt, somit gilt für die homogene Differentialgleichung:

$$0 = w''(x) + \zeta^2 w(x). \quad (5.5)$$

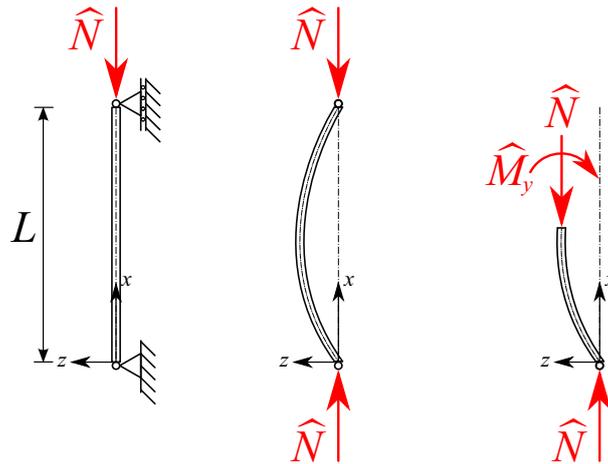


Abb. 5.1: Gelenkig gelagerte stabförmige Struktur unter Druckbelastung: Links im Grundzustand, Mitte im verformten Zustand und rechts als Freikörperbild [121].

Nun wird für diese Differentialgleichung eine nicht triviale Lösung  $w(x) \neq 0$  gesucht. Nur für den Parameter  $\zeta$  müssen Werte gefunden werden. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$w(x) = w_1 \sin(\zeta x) + w_2 \cos(\zeta x), \quad (5.6)$$

wobei  $w_1$  und  $w_2$  unbekannte konstante Parameter sind. Mit Zuhilfenahme der Randbedingungen, die sowohl bei  $x = 0$  als auch bei  $x = L$  eine gelenkige Lagerung aufweist, werden die unbekannt Konstanten ermittelt. Die Struktur kann an beiden Rändern keine Verschiebungen  $w(x)$  aufweisen. Mit dem Einsetzen dieser Randbedingungen liegen zwei neue Gleichungen mit zwei unbekannt Konstanten vor:

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 0, \quad (5.7)$$

$$w(x=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 \sin(\zeta L) = 0. \quad (5.8)$$

Für die Gleichung (5.8) kann zunächst eine triviale Lösung mit  $w_1 = 0$  festgestellt werden. Wird der  $\zeta$ -Parameter mit der Länge  $L$  multipliziert, können nicht triviale Lösungen erzeugt werden, die wie folgt beschrieben sind:

$$\zeta L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

Bei diesen nicht triviale Lösungen können sich seitliche Verformungen der Struktur ergeben. Für  $n = 1$  erhält man die niedrigste Last, die eine Auslenkung der Struktur hervorruft. Im Regelfall wird genau diese Last gesucht. In der Fachliteratur wird sie allgemein als kritische Last oder Eulersche Knicklast bezeichnet. Über die Beziehung

$$\zeta^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{\widehat{N}}{\widehat{EI}_{yy}}, \quad (5.10)$$

erhält man für  $n = 1$  folgende kritische Last:

$$\widehat{N}_{cr} = \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2}. \quad (5.11)$$

Unter der kritischen Last lässt sich die Auslenkungsfunktion der Struktur wie folgt formulieren:

$$w(x) = w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (5.12)$$

Dabei ist die Amplitude  $w_1$  der Sinus-Halbwellen noch unbekannt. Die Theorie zweiter Ordnung lässt Linearisierungen zu, weil die Auslenkungen der analysierten Struktur als klein eingeschätzt werden. Möchte man nun die geknickte Auslenkung der Struktur bestimmen, müssen Theorien mit höheren Ordnungen herangezogen werden. Diese Theorien dürfen nicht linearisiert werden und müssen große Auslenkungen darstellen können.

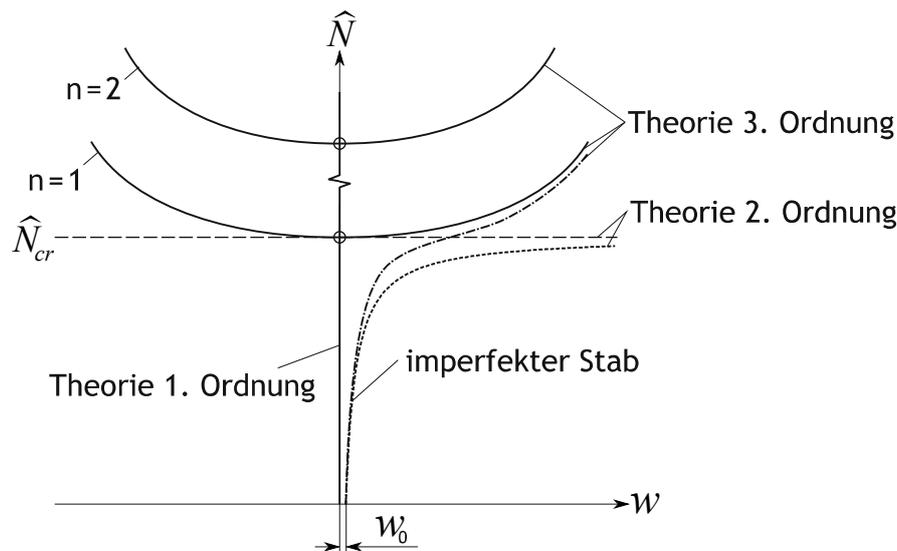


Abb. 5.2: Druckkraft-Auslenkungs-Diagramm einer stabförmigen Struktur unter Druckbelastung.

Bei einer stabilen Gleichgewichtslage kann keine seitliche Auslenkung der Struktur wahrgenommen werden. Alle Lösungen der Druckbelastung, die unter der kritischen Last liegen, ( $\hat{N} < \hat{N}_{cr}$ ) gelten als triviale Lösung. Zwischen der stabilen und indifferenten Gleichgewichtslage stellt sich für  $n = 1$  der Verzweigungspunkt dar (siehe Abbildung 5.2). Genau an dieser Stelle erreicht die Drucklast die kritische Knicklast, es gilt:  $\hat{N} = \hat{N}_{cr}$ .

Im Druckkraft-Auslenkungs-Diagramm (siehe Abbildung 5.2), sind die Verzweigungspunkte und die dazugehörigen Äste für sowohl  $n = 1$  als auch für  $n = 2$  dargestellt. Hierbei ist der Weg vom niedrigsten zum höheren Verzweigungspunkt als labil anzusehen. Demnach können bei kleinen Störungen seitliche Auslenkungen der Struktur auftreten. Die Last würde sich zu den seitlichen Ästen des nächst tieferen Verzweigungspunkts bewegen und dementsprechend die benachbarte stabile Gleichgewichtslage erreichen. Die Amplitude der Auslenkung bleibt nach der Theorie zweiter Ordnung undefiniert. Für  $n = 1$  erhält man infolgedessen eine horizontale Gerade, die durch den Verzweigungspunkt geht. Ob die Struktur nach rechts oder links ausweicht bzw. einknickt, bleibt ebenfalls unbestimmt. Folglich teilt sich die Lösung im Verzweigungspunkt sowohl in eine horizontale als auch in eine vertikale Lösungsgerade.

Mit Zuhilfenahme der Theorie dritter Ordnung können nicht lineare Beziehungen zwischen der Auslenkung der Struktur und der dazugehörigen kritischen Last dargestellt werden,

wie in Abbildung 5.2 veranschaulicht wird. Daraus ergibt sich für den Lösungsgraphen eine Funktion, die zur dritten Ordnung gehört. An dieser Stelle ist es wichtig, zu erwähnen, dass die betrachtete Struktur als ideal angesehen wird. Für die Beschreibung der Theorie wird eine modellhafte Struktur herangezogen und analysiert. In der Realität werden sowohl die Geometrien und Materialien als auch die Lasteinwirkungen und Randbedingungen der betrachteten Struktur als imperfekt beurteilt. Dementsprechend würde bei einer realen Struktur die kritische Druckbelastung stets unter der theoretischen Knicklast liegen. Folglich tritt eine seitliche Verschiebung der Struktur viel früher auf.

Nicht nur die Knickform, sondern auch die kritische Eulerlast sind von der Auswahl der Randbedingungen der stabförmigen Struktur abhängig. Sie legen sowohl fest, welche Auslenkungsform entsteht, als auch die Größenordnung der Knicklast. Werden die Querschnittform und die Materialeigenschaften der Stabstruktur nicht modifiziert, kann generell festgestellt werden: Je steifer die Randbedingungen der Struktur gewählt werden, desto größer wird die kritische Knicklast.

Angesichts der Differentialgleichung (5.5) und der allgemeinen Gleichung (5.6) kann für die Stabstruktur lediglich der Eulerfall 2, beidseitig gelenkig gelagert, analysiert werden.

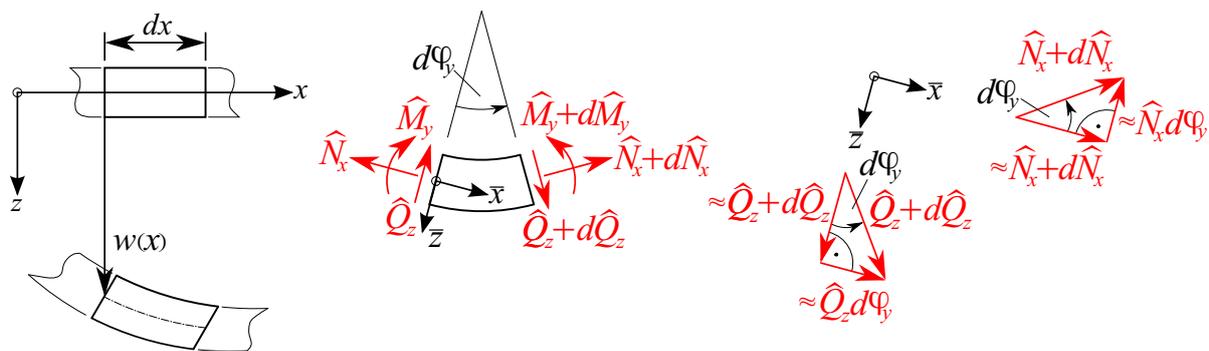


Abb. 5.3: Differentielles Schnittelement der Länge  $dx$  (links), Schnittgrößen am differentiellen Schnittelement (Mitte) und Komponentenzerlegung der Normal- und Querkraft (rechts) [100], [121].

In dieser Arbeit sollen nun weitere Randbedingungsfälle und die dazugehörigen kritischen Knicklasten analysiert werden. Hierfür werden die Schnittgrößen an beiden Schnittstellen der infinitesimalen ausgeknickten Struktur herangezogen. Aus Abbildung (5.3) ist zu entnehmen, dass zwischen den beiden Schnittufern die Schnittgrößen sich jeweils um einen differentiellen Wert unterscheiden. An dieser Stelle muss beachtet werden, dass sowohl bei der Normalkraft als auch bei der Querkraft an beiden Schnittufern die Richtungen der Schnittkräfte unterschieden werden. Anhand der Abbildung (5.3) ist zu erkennen, dass die Normal- und Querkräfte in zwei Komponenten zerlegt wurden. Entsprechend der Theorie zweiter Ordnung wird der Biegewinkel  $w'(x)$  als klein angenommen und vernachlässigt. Der verformte Balken besitzt approximativ die gleiche Länge wie bei der Ausgangslage. Die Gleichgewichtsbedingungen für die verformte Struktur lauten wie folgt:

$$\sum_i = \hat{M}_{iy} = 0 \iff 0 = d\hat{M}_y - \hat{N}_z dx, \quad (5.13)$$

$$\sum_i = \hat{N}_{ix} = 0 \iff 0 = d\hat{N} - \hat{N}_z dw'(x), \quad (5.14)$$

$$\sum_i = \widehat{N}_{iz} = 0 \iff 0 = d\widehat{N}_z + \widehat{N}dw'(x). \quad (5.15)$$

Formt man die Gleichung (5.13) nach  $\widehat{N}_z$  um und setzt dieses Ergebnis in die Gleichung (5.14) ein und verwendet die Differentialgleichung der Biegelinie zweiter Ordnung, siehe Gleichung (5.2), kann folgender Ausdruck dargestellt werden:

$$\frac{d\widehat{N}}{dx} = -\frac{d\widehat{M}_y}{dx} \frac{dw'(x)}{dx} \iff \frac{d\widehat{N}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \widehat{EI}_{yy} \frac{dw'(x)}{dx} \right) \frac{dw'(x)}{dx}. \quad (5.16)$$

Der rechte Teil der Gleichung kann vernachlässigt werden, weil sie als Gleichung höherer Ordnung als klein gilt. Im Rahmen der verwendeten Theorie wird die betrachtete Struktur unter einer gleichbleibenden axialen Druckkraft belastet. Demzufolge gilt  $\widehat{N}_x = -\widehat{N}$ . Die Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment wird wie folgt definiert:

$$\left( \widehat{M}_y + d\widehat{M}_y \right) - \widehat{M}_y - \widehat{N}_z dx = 0 \iff \frac{d\widehat{M}_y}{dx} = \widehat{Q}_z. \quad (5.17)$$

Bei einer Zusammenführung der Gleichungen (5.2), (5.15) und (5.17) entsteht eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die sich wie folgt darstellen lässt:

$$0 = \left( \widehat{EI}_{yy} w''(x) \right)'' + \widehat{N} w''(x). \quad (5.18)$$

Durch Wiedereinführung der Substitution  $\zeta^2 = \frac{\widehat{N}}{\widehat{EI}_{yy}}$  entsteht folgender Ausdruck:

$$0 = w^{(IV)}(x) + \zeta^2 w''(x). \quad (5.19)$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet allgemein:

$$w(x) = w_1 \sin(\zeta x) + w_2 \cos(\zeta x) + w_3 \zeta x + w_4. \quad (5.20)$$

Über die Randbedingungen können die unbekanntenen Konstanten  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  und  $w_4$  berechnet werden. Insgesamt werden vier Lagerungstypen betrachtet. Diese vier Grundfälle werden in der Fachliteratur als Eulerfälle bezeichnet. Die vier Eulerfälle mit den dazugehörigen Randbedingungen sind in der nachfolgenden Tabelle abgebildet. Zusätzlich ist die seitliche Auslenkungsform bzw. Knickform des jeweiligen Falls dargestellt. Für einen einfachen Ausdruck der kritischen Knicklast wird der Eulersche Knickbeiwert  $k_{cr}$  eingeführt. Die allgemeine Lösung der kritischen Knicklast lautet:

$$\widehat{N}_{cr} = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}}{L^2}. \quad (5.21)$$

Die Knicklast  $\widehat{N}_{cr}$  kann auch unabhängig vom Knickbeiwert  $k_{cr}$  formuliert werden. Hierfür wird die freie Knicklänge  $L_0$  eingeführt. Sie beschreibt die Länge zwischen zwei Punkten auf der Auslenkungsform, in der die zweite Ableitung der Biegelinie gleich Null ist. Demgemäß kann die Gleichung (5.21) wie folgt beschrieben werden:

$$\widehat{N}_{cr} = \frac{\pi^2 \widehat{EI}}{L_0^2}, \quad (5.22)$$

wobei die Knicklänge  $L_0$  folgendermaßen definiert wird:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{k_{cr}}}. \quad (5.23)$$

In der Gleichung (5.22) wird das kleinste Trägheitsmoment der untersuchten Struktur verwendet. Voraussetzung hierfür sind identische Randbedingungen um die  $y$ - und  $z$ -Achse. Treten unterschiedlich Lagerungen für beide Achsen auf, müssen diese unabhängig voneinander untersucht werden.

Eulerfall	I	II	III	IV
Lagerung & Knickform				
Knickbeiwert $k_{cr}$	0,25	1	2,04	4
Knicklänge $L_0$	$2L$	$L$	$0,7L$	$0,5L$

Abb. 5.4: Die vier Euler-Knickfälle.

### 5.1.2 Drillknicken und Biegedrillknicken

In diesem Abschnitt sollen neben dem Biegeknicken weitere Stabilitätsprobleme analysiert werden, die bei stabförmigen Strukturen unter Druckbelastung auftreten können. Bei offenen Profilen liegt häufig eine Kombination aus Biegung und Verdrehung vor, wobei die Biegungen sich auf die Hauptachsen beschränken und die Verdrehung sich um die Schwerpunktsachse bzw. parallel zur ihr bezieht.

Folgende Stabilitätsprobleme können bei einigen Profilen auftauchen:

- Biegeknicken, sowohl um die  $y$ -Achse als auch um die  $z$ -Achse
- Drillknicken um die  $x$ -Achse
- Biegedrillknicken, sowohl um die  $y$ -Achse als auch um die  $z$ -Achse.

Die ersten beiden Stabilitätsprobleme treten unabhängig voneinander auf und sind für alle Lagerungstypen mit einer kritischen Knicklast verknüpft. Hierbei ist die kleinste Last ausschlaggebend und gibt an, welche Knickform auftritt. Der Fall Biegeknicken wurde ausführlich im Abschnitt 5.1.1 erläutert. Der zweite Fall wird als Drillknicken bezeichnet. Darunter ist eine Verdrehung des Profils um die Schwerpunktsachse zu verstehen. Für bestimmte Profile treten diese beiden Stabilitätsprobleme abhängig voneinander auf. Das bedeutet, sie können nicht voneinander entkoppelt werden und eine Kombination aus Biege- und Drillknicken taucht auf. In vielen Literaturquellen wird dieser Fall als Biegedrillknicken bezeichnet. Abbildung 5.6 zeigt beispielhaft für ein I-Profil alle möglichen theoretisch denkbaren Stabilitätsfälle. In diesem Abschnitt wird die Verdrehung mit  $\vartheta$  angegeben.

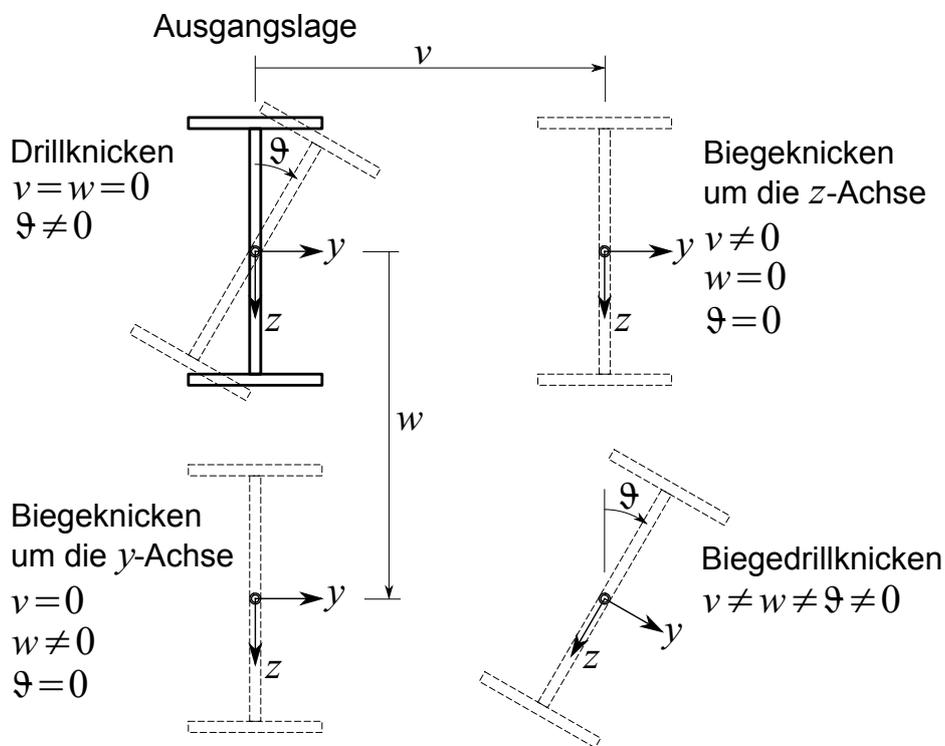


Abb. 5.5: Verschiebungen eines I-Profiles für alle unter einer axialen Druckbelastung möglichen Stabilitätsfälle.

Im nächsten Schritt soll die Herleitung der eben beschriebenen Stabilitätsprobleme dargestellt werden. Zunächst wird wie schon zuvor eine stabartige Struktur betrachtet, die an beiden Seiten gelenkig gelagert ist (siehe Abbildung 5.1). Für den Querschnitt wird hier ein L-Profil verwendet, das mit einer Kraft  $\hat{N}$  belastet wird (siehe Abbildung 5.6). Diese Belastung wirkt durch den Flächenschwerpunkt (FSP). Dementsprechend ist eine Verdrehung um den Schubmittelpunkt (SMP) ohne Einschränkungen möglich. Die  $y$ - und  $z$ -Achse des Profils werden als Hauptachsen definiert.

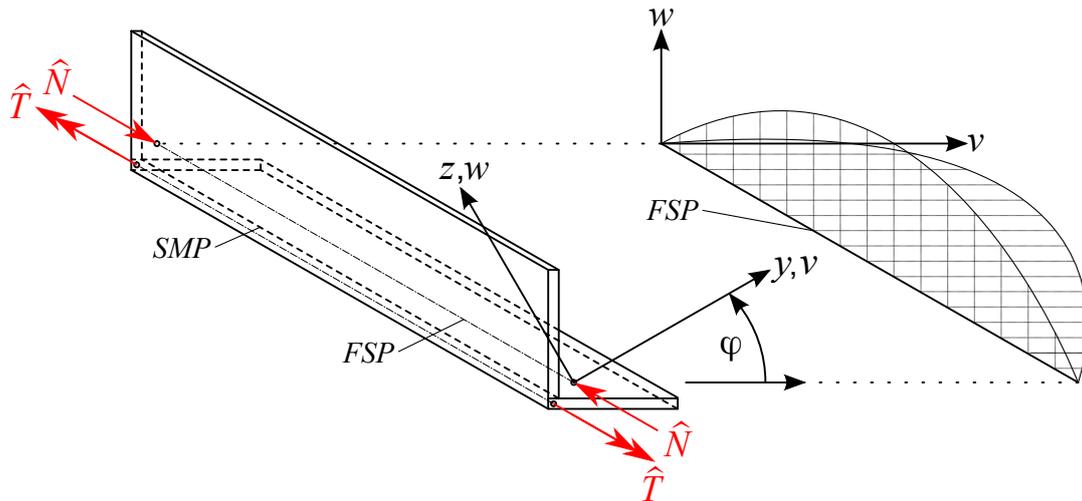


Abb. 5.6: Ein L-Profil unter Druckbelastung im Flächenschwerpunkt FSP (links) und die dazugehörigen Verformungen  $v$  und  $w$  in Richtung der Hauptachsen  $y$  und  $z$ . [121]

Zunächst sorgt die Druckbelastung nur für eine Längenänderung entlang der Schwerpunktsachse des Profils. Das Profil wird dann an Knicken versagen, wenn die Drucklast einen kritischen Wert erreicht. Hierbei würde sich um die  $y$ - oder  $z$ -Achse eine Auslenkung des Stabs einstellen. Mit dieser Verformung wird ein Torsionsmoment  $\hat{T}(x)$  um den Schubmittelpunkt hervorgerufen, das durch die Druckbelastung  $\hat{N}$  erzeugt wird. Eine reine Biegung um die  $y$ -Achse sorgt für eine Verschiebung  $v(x)$ . Die Auslenkung  $w(x)$  dagegen wird infolge einer Biegung um die  $z$ -Achse hervorgerufen. Neben diesen beiden Verschiebungen muss nun für diesen Fall eine zusätzliche Verdrehung  $\vartheta(x)$  um die  $x$ -Achse berücksichtigt werden, wie in Abbildung 5.7 veranschaulicht wird.

Für die Herleitung der kritischen Last wird die Gleichung (5.4) herangezogen. Hierbei muss beachtet werden, dass sowohl die Biegeauslenkung als auch die Verdrehung der Struktur eine Auswirkung auf die Verschiebung des Flächenschwerpunkts  $v_c(x)$  bzw.  $w_c(x)$  hat (siehe Abbildung 5.7).

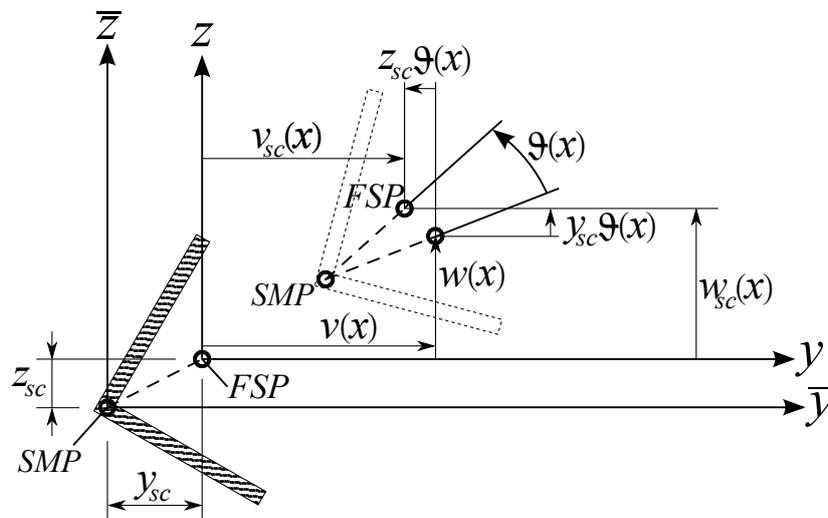


Abb. 5.7: Die beim Biegedrillknicken auftauchenden Verschiebungen von Flächenschwerpunkt (FSP) und Schubmittelpunkt (SMP) eines L-Profiles [121].

Verschiebungen, die durch eine Verdrehung  $\vartheta(x)$  auftreten, können für kleine Winkel als  $y_{sc}\vartheta(x)$  bzw.  $z_{sc}\vartheta(x)$  angenommen werden. Für die Verschiebungen des Flächenschwerpunkts erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$w_c(x) = w(x) + y_{sc}\vartheta(x), \quad (5.24)$$

$$v_c(x) = v(x) - z_{sc}\vartheta(x). \quad (5.25)$$

Für das Knicken um die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse gilt nun:

$$0 = \widehat{EI}_{yy}w''(x) + \widehat{N}(w(x) + y_{sc}\vartheta(x)), \quad (5.26)$$

für das Knicken um die  $z$ - bzw.  $y$ -Achse gilt wiederum:

$$0 = \widehat{EI}_{zz}v''(x) + \widehat{N}(v(x) - z_{sc}\vartheta(x)). \quad (5.27)$$

Das Torsionsmoment, das von der  $x$ -Koordinate abhängig ist, wird durch die Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion beschrieben. Gemäß der Gleichung

$$\widehat{T}(x) = \widehat{T}_{SV} + \widehat{T}_W = \widehat{GI}_T\vartheta' + \widehat{EI}_\omega\vartheta''', \quad (5.28)$$

die nochmals nach  $x$  abgeleitet wird, kann nun für die Torsion  $\widehat{T}$  folgende allgemeine Differentialgleichung vierter Ordnung präsentiert werden:

$$\widehat{T}'(x) = \widehat{GI}_T\vartheta'' + \widehat{EI}_\omega\vartheta^{(IV)}, \quad (5.29)$$

wobei das Torsionsmoment  $\widehat{T}'$  sich auf eine Länge bezieht. In Abbildung 5.8 wird ein infinitesimales Schnittelement mit der Länge  $dx$  betrachtet, um das Torsionsmoment  $\widehat{T}'$  zu ermitteln. Veranlasst durch die Krümmungen der geknickten Struktur  $v''$  bzw.  $w''$ , entstehen abhängig von der Druckkraft  $\widehat{N}$  die Belastungskomponenten  $d\widehat{N}_y$  und  $d\widehat{N}_z$  auch Abtriebskräfte genannt, wie Abbildung 5.8 zeigt.

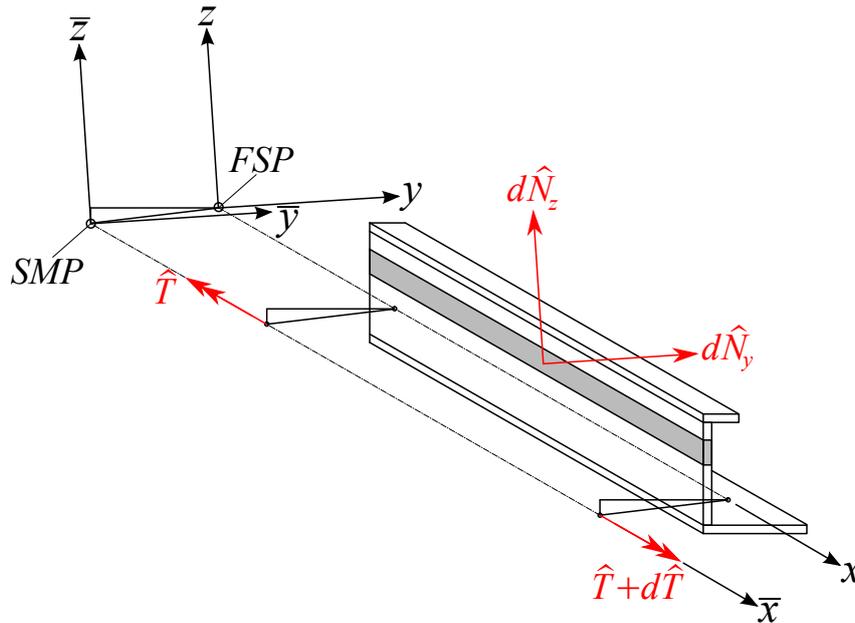


Abb. 5.8: Schnittelement eines infinitesimalen Profils mit der Länge  $dx$  und den daraus resultierenden Schnittkräften  $d\widehat{N}_z$ ,  $d\widehat{N}_y$  [121].

Diese Kräfte halten das Gleichgewicht mit den Normalspannungen des Balkenquerschnitts. Mit Hilfe der Abbildung 5.9 soll nun der Zusammenhang zwischen den Normalspannungen und Abtriebskräften dargestellt werden. Als Beispiel dient  $d\hat{N}_y$ . Zunächst wird die Summe aller Kräfte in der  $y$ -Richtung gebildet:

$$\sum_i = \hat{N}_{iy} = 0 \iff 0 = d\hat{N}_y - \sigma_x dA \sin(v'_{dA}) + (\sigma_x + d\sigma_x) dA \sin(v'_{dA} + dv'_{dA}). \quad (5.30)$$

Für einen einfachen Ausdruck zu der oben angeführten Gleichung wird sie nach  $d\hat{N}_y$  umgeformt:

$$d\hat{N}_y = \sigma_x dA v'_{dA} - \sigma_x dA (v'_{dA} + dv'_{dA}) - d\sigma_x dA (v'_{dA} + dv'_{dA}). \quad (5.31)$$

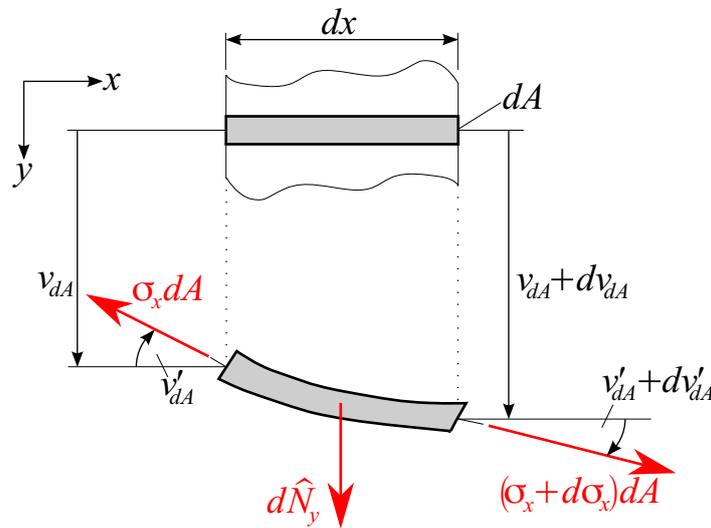


Abb. 5.9: Beziehung zwischen der Schnittkraft  $d\hat{N}_y$  und den Druckspannungen  $\sigma_x$  [121].

Über eine Linearisierung erhält man

$$d\hat{N}_y = -\sigma_x dA dv'_{dA} - d\sigma_x dA v'_{dA} - d\sigma_x dA dv'_{dA}. \quad (5.32)$$

Mit

$$dv'_{dA} = \frac{\partial v'_{dA}}{\partial x} dx = v''_{dA} dx \quad (5.33)$$

erhält die Gleichung (5.32) folgende Darstellung:

$$d\hat{N}_y = -\sigma_x dA v''_{dA} dx - d\sigma_x dA v'_{dA} - v''_{dA} d\sigma_x dA dx. \quad (5.34)$$

Der abschließend angeführte Ausdruck ist verglichen zu den anderen viel kleiner und kann vernachlässigt werden. Dividiert man die vereinfachte Gleichung durch  $dx$ , entsteht folgende Beziehung

$$\frac{d\hat{N}_y}{dx} = -\sigma_x dA v''_{dA} - \frac{d\sigma_x}{dx} dA v'_{dA}. \quad (5.35)$$



$$v_{dA}(x) = v(x) - \bar{z}_{dA}\vartheta(x). \quad (5.41)$$

Leitet man die oben angeführten Gleichungen nach  $x$  ab, erhält man die Verdrehungen entlang der  $x$ -Achse. Für die Krümmungen muss jedoch die Gleichung (5.41) ein zweites Mal nach  $x$  abgeleitet werden. Es gilt:

$$w''_{dA}(x) = w''(x) + \bar{y}_{dA}\vartheta''(x), \quad (5.42)$$

$$v''_{dA}(x) = v''(x) - \bar{z}_{dA}\vartheta''(x). \quad (5.43)$$

Die Beziehung zwischen der Abtriebskraft, ob in der  $y$ - oder  $z$ -Richtung, und der dazugehörigen Krümmung kann über die Gleichung (5.38) bzw. (5.39) hergestellt und wie folgt dargestellt werden:

$$d\hat{N}_z = \frac{\hat{N}}{A}dAw''_{dA}(x)dx = \frac{\hat{N}}{A}dA(w''(x) + \bar{y}_{dA}\vartheta''(x))dx, \quad (5.44)$$

$$d\hat{N}_y = \frac{\hat{N}}{A}dAv''_{dA}(x)dx = \frac{\hat{N}}{A}dA(v''(x) - \bar{z}_{dA}\vartheta''(x))dx. \quad (5.45)$$

Die Abtriebskräfte  $d\hat{N}_y$  und  $d\hat{N}_z$  beziehen sich unabhängig voneinander auf die infinitesimale Querschnittsfläche  $dA$ . Über diese Kraftkomponenten entsteht die differentielle Zunahme des Torionsmoments  $d\hat{T}$ . Aus der folgenden Summe und Integration erhält man für das Torionsmoment  $d\hat{T}$  den Ausdruck:

$$d\hat{T} = - \int \bar{z}_{dA}d\hat{N}_y + \int \bar{y}_{dA}d\hat{N}_z. \quad (5.46)$$

Indem die Gleichung (5.46) durch  $dx$  dividiert und zuvor die Gleichungen (5.44) und (5.45) eingesetzt werden, kann folgende neue Beziehung aufgestellt werden

$$\frac{d\hat{T}}{dx} = \frac{\hat{N}}{A} \left( - \int_A v''\bar{z}_{dA}dA + \int_A \vartheta''\bar{z}_{dA}^2dA + \int_A w''\bar{y}_{dA}dA + \int_A \vartheta''\bar{y}_{dA}^2dA \right), \quad (5.47)$$

Zu den Lösungen der folgenden Integrationen

$$\int_A \bar{z}_{dA}dA = z_{sc}A, \quad (5.48)$$

$$\int_A \bar{y}_{dA}dA = y_{sc}A, \quad (5.49)$$

$$\int_A \bar{z}_{dA}^2dA = I_{\bar{y}}, \quad (5.50)$$

$$\int_A \bar{y}_{dA}^2dA = I_{\bar{z}}, \quad (5.51)$$

lässt sich die Gleichung (5.47) wie folgt vereinfacht darstellen:

$$\frac{dT}{dx} = T' = -\widehat{N}(z_{sc}v'' - y_{sc}w'') + I_0 \frac{\widehat{N}}{A} \vartheta'', \quad (5.52)$$

wobei  $A$  den Flächeninhalt des Profils angibt. Das um den Schubmittelpunkt basierende polare Flächenmoment zweiter Ordnung wird folgendermaßen definiert:

$$I_0 = I_y + I_z + A(y_{sc}^2 + z_{sc}^2). \quad (5.53)$$

Der polare Gyrationradius wird wie folgt berechnet:

$$i_\omega^2 = \frac{I_0}{A}. \quad (5.54)$$

Im Folgenden wird der polare Gyrationradius  $i_\omega$  für die Darstellung der Ergebnisse verwendet. Werden die Gleichungen (5.29) und (5.52) miteinander gleichgesetzt, kann die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung wie folgt formuliert werden:

$$\widehat{E}I_\omega \vartheta^{(IV)} - (\widehat{G}I_t - i_\omega^2 \widehat{N}) \vartheta'' - \widehat{N}(z_{sc}v'' - y_{sc}w'') = 0 \quad (5.55)$$

Für die Lösung der Verformung werden sowohl für die Verschiebungen  $v$  und  $w$  als auch für die Verdrehung  $\vartheta$  des Profils folgende sinusförmige Ansatzfunktionen verwendet:

$$v = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (5.56)$$

$$w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (5.57)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (5.58)$$

wobei  $v_0$ ,  $w_0$  und  $\vartheta_0$  die unbekanntenen Amplitudenparameter sind. Setzt man diese drei Ansatzfunktionen in die Differentialgleichungen (5.26), (5.27) und (5.55) ein, entsteht ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten und den folgenden drei Gleichungen:

$$0 = \left( \widehat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{E}I_{zz}}{L^2} \right) v_0 - \widehat{N} z_{sc} \vartheta_0, \quad (5.59)$$

$$0 = \left( \widehat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{E}I_{yy}}{L^2} \right) w_0 - \widehat{N} y_{sc} \vartheta_0, \quad (5.60)$$

$$0 = \left( -\frac{\pi^2 \widehat{E}I_\omega}{L^2} - \widehat{G}I_t + i_\omega^2 \widehat{N} \right) \vartheta_0 + \widehat{N} z_{sc} v_0 + \widehat{N} y_{sc} w_0. \quad (5.61)$$

Nur die nicht trivialen Lösungen sind von Interesse. Aus diesem Grund muss die Determinante der folgenden Matrix gleich Null gesetzt werden:

$$\left| \begin{bmatrix} \widehat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{E}I_{zz}}{L^2} & 0 & -\widehat{N} z_{sc} \\ 0 & \widehat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{E}I_{yy}}{L^2} & \widehat{N} y_{sc} \\ -\widehat{N} z_{sc} & \widehat{N} y_{sc} & -\frac{\pi^2 \widehat{E}I_\omega}{L^2} - \widehat{G}I_t + i_\omega^2 \widehat{N} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (5.62)$$

Löst man die Determinante der obigen Matrix auf, entsteht folgende Gleichung dritter Ordnung:

$$0 = \left( \hat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \right) \left( \hat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2} \right) \left( -\frac{\pi^2 \widehat{EI}_\omega}{L^2} - \widehat{GI}_t + i_\omega^2 \hat{N} \right) - \left( -\hat{N} z_{sc} \right)^2 \left( \hat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2} \right) - \left( -\hat{N} y_{sc} \right)^2 \left( \hat{N} - \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \right). \quad (5.63)$$

Unter bestimmten Bedingungen können die Stabilitätsfälle Biegeknicken und Drillknicken entkoppelt voneinander auftreten, wenn z.B. der Schubmittelpunkt auf dem Flächenschwerpunkt liegt, sodass die Abstände  $y_{sc}$  und  $z_{sc}$  in der Gleichung (5.63) gleich Null sind. Wenn einer der übrigen Klammerausdrücke zu Null wird, bedeutet dies, dass die angreifende Druckkraft  $\hat{N}$  einen kritischen Wert erreicht und sich in einem Verzweigungspunkt befindet. In diesem Fall ergeben sich drei voneinander unabhängige Ausdrücke für die kritische Drucklast. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\hat{N}_{cry}^B = \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xz\text{-Ebene,} \quad (5.64)$$

$$\hat{N}_{crz}^B = \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xy\text{-Ebene,} \quad (5.65)$$

$$\hat{N}_{cr\psi}^B = \frac{1}{i_\omega^2} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_\omega}{L^2} + \frac{1}{i_\omega^2} \widehat{GI}_t \quad \text{Drillknicken um die } x\text{-Achse.} \quad (5.66)$$

Die kleinste der kritischen Lasten aus den drei Gleichungen ist die ausschlaggebende Knicklast. Für beliebige Randbedingungsfälle sehen die kritischen Lasten, die nun abhängig vom Knickbeiwert  $k_{cr}$  sind, wie folgt aus:

$$\hat{N}_{cry}^B = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xz\text{-Ebene,} \quad (5.67)$$

$$\hat{N}_{crz}^B = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xy\text{-Ebene,} \quad (5.68)$$

$$\hat{N}_{cr\psi}^B = \frac{1}{i_\omega^2} \left( k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_\omega}{L^2} + \widehat{GI}_t \right) \quad \text{Drillknicken um die } x\text{-Achse.} \quad (5.69)$$

Liegt der Schubmittelpunkt nicht auf dem Flächenschwerpunkt, kann das folgende allgemeine Gleichungssystem angewandt werden:

$$\left| \begin{bmatrix} \hat{N}_{crz}^B & 0 & 0 \\ 0 & \hat{N}_{cry}^B & 0 \\ 0 & 0 & \hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2 \end{bmatrix} - \hat{N}_{cr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_{sc} \\ 0 & 1 & -y_{sc} \\ z_{sc} & -y_{sc} & i_\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0. \quad (5.70)$$

Hierbei entsteht eine kubische Gleichung, die zu drei Lösungen führt. Auch hier ist der kleinste Wert die ausschlaggebende Knicklast. Die Gleichung (5.70) gilt sowohl für beliebige Querschnittsformen als auch für beliebige Randbedingungsfälle.

### 5.1.3 Kippen

Bis jetzt wurden nur axial belastete Balkenstrukturen auf ihr Stabilitätsverhalten untersucht. Werden laterale Lasten auf eine Struktur aufgetragen, kann sich ein Versagen einstellen, das dem Biegedrillknicken verwandt ist. Besitzt die untersuchte Struktur ein Flächenmoment, das viel größer ist als das Flächenmoment um die andere Hauptachse, tritt zusätzlich zur Biegeverformung eine Verdrehung der Struktur auf. Dieses Phänomen kann bei schmalen und gleichzeitig hohen Balken beobachtet werden. Versagt das Bauteil bei dieser Konstellation, wird dieses Stabilitätsproblem als Kippen bezeichnet.

In diesem Abschnitt sollen nun Balken analysiert werden, die zur  $z$ -Achse einen symmetrischen Querschnitt besitzen und die Belastung nur in der Symmetrieebene aufgebracht wird. In dieser Arbeit sollen hauptsächlich I-Träger untersucht werden. Das Stabilitätsverhalten in Form von Kippen solcher Balkenstrukturen wurde ausführlich z.B. in den Büchern [121], [127], [130] hergeleitet und diskutiert.

In den nächsten Schritten werden einige geschlossen-analytische Ausdrücke für dieses Phänomen beschrieben, hierbei werden der Übersichtlichkeit halber nur einige Schritte dargestellt. Für weitere Details können die Werke [121] für isotrope Balken und [119] für orthotrope Balken herangezogen werden.

Die kritische Knicklast für eine beidseitig gelenkig gelagerte Struktur, die an ihren Enden mit Momenten belastet wird, kann über den folgenden Ausdruck berechnet werden [132], [133]:

$$0 = \widehat{M}_{cr}^2 - \widehat{N}_{crz}^B \beta_1 M_{cr} - \widehat{N}_{crz}^B \widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2, \quad (5.71)$$

wobei  $\beta_1$  ein Querschnittsparameter ist, der wie folgt bestimmt wird

$$\beta_1 = J_1 + J_2 - 2z_{sc}. \quad (5.72)$$

Für einen Balken, der aus einem isotropen Werkstoff besteht, können  $J_1$  und  $J_2$  wie folgt beschrieben werden:

$$J_1 = \frac{1}{I_{yy}} \int_{(A)} z^3 dA, \quad (5.73)$$

$$J_2 = \frac{1}{I_{yy}} \int_{(A)} zy^2 dA. \quad (5.74)$$

Für offene, dünnwandige, isotrope Träger ergibt sich für  $J_1$  und  $J_2$ :

$$J_1 = \frac{1}{EI_{yy}} \int_{(S)} (Eh) z^3 d\eta, \quad (5.75)$$

$$J_2 = \frac{1}{EI_{yy}} \int_{(S)} (Eh) zy^2 d\eta, \quad (5.76)$$

wobei  $h$  die Wanddicke ist und  $\eta$  die Koordinate, die entlang des Umfangs läuft. Für dünnwandige Composite-Träger mit orthotropen Eigenschaften gelten folgende Ausdrücke:

$$J_1 = \frac{1}{\widehat{EI}_{yy}} \int_{(S)} \frac{1}{\alpha_{11}} z^3 d\eta, \quad (5.77)$$

$$J_2 = \frac{1}{\widehat{EI}_{yy}} \int_{(S)} \frac{1}{\alpha_{11}} zy^2 d\eta. \quad (5.78)$$

An dieser Stelle ist es wichtig, zu erwähnen, dass die verwendeten Formeln sich auf orthotrope Balkenstrukturen beschränken, jedoch die effektiven Steifigkeiten für allgemeine Composite-Träger aus Abschnitt 4.1 eingesetzt werden.

Des Weiteren werden die gelenkigen Lagerungen über eine Gabellagerung gestützt. Dementsprechend werden die betrachteten Biegeträger ohne Wölbbehinderung untersucht.

Eine Umformung der Gleichung (5.71) nach dem kritischen Moment  $\widehat{M}_{cr}$  führt zu folgender Gleichung:

$$\widehat{M}_{cr} = \widehat{N}_{crz}^B \left( \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 + \frac{\widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\widehat{N}_{crz}^B}} \right), \quad (5.79)$$

hierbei gilt für

$$\widehat{N}_{crz}^B = k_{cr} \frac{\pi^2}{L^2} \widehat{EI}_{zz} \quad (5.80)$$

und für

$$\widehat{N}_{cr\psi}^B = \frac{1}{i_\omega^2} \left( k_{cr} \frac{\pi^2}{L^2} \widehat{EI}_\omega + \widehat{GI}_t \right). \quad (5.81)$$

In Bezug auf symmetrische Querschnitte gilt für den polaren Gyrationradius [?] folgende Gleichung:

$$i_\omega^2 = z_{sc}^2 + \frac{\widehat{EI}_{yy} + \widehat{EI}_{zz}}{\widehat{EA}}, \quad (5.82)$$

hierbei ist  $z_{sc}$  der Abstand zwischen dem Flächenschwerpunkt und dem Schubmittelpunkt in der  $z$ -Richtung. Für symmetrische Querschnitte ist der Abstand  $y_{sc}$  stets gleich Null.

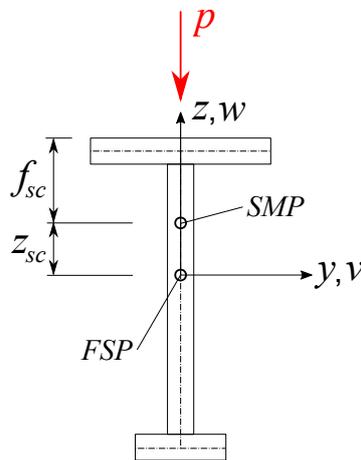


Abb. 5.11: Schwerpunkt und Schubmittelpunkt: Abstände eines Balkenquerschnitts.

Wird ein Balken über die gesamte Länge  $L$  mit einer in der Symmetrieebene wirkenden Streckenlast  $p$  belastet, wobei dieselben Randbedingungen wie zuvor gelten, kann nach [119] folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$0 = \underbrace{\left(\frac{\pi^2 + 3}{12\pi^2}\right)^2}_{0,01181} L^4 \widehat{p}_{cr}^2 - \left( \underbrace{\frac{\pi^2 - 3}{12\pi^2}}_{0,05800} \beta_1 + \underbrace{\frac{1}{\pi^2}}_{0,10132} f_{sc} \right) L^2 \widehat{N}_{crz}^B \widehat{p}_{cr} - \widehat{N}_{crz}^B \widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2. \quad (5.83)$$

umgeformt in:

$$\widehat{M}_{cr} = \frac{\widehat{p}_{cr} L^2}{8} = 1,15 \widehat{N}_{crz}^B \left( 0,466 f_{sc} + 0,267 \beta_1 + \sqrt{(0,466 f_{sc} + 0,267 \beta_1)^2 + \frac{\widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\widehat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.84)$$

In dieser Gleichung ist  $f_{sc}$  der Abstand zwischen dem Schubmittelpunkt und die Position der angreifenden Belastung (siehe Abbildung 5.11). Sowohl [133] als auch [134] haben eine allgemeine Gleichung für dünnwandige orthotrope Balken hergeleitet, die die kritische Knick- bzw. Kippplast angibt, es gilt:

$$\widehat{Q}_{cr} = F_1 k_{cr} \frac{\pi^2}{L^2} \widehat{EI}_{zz} \left( F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1 + \sqrt{(F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1)^2 + \frac{\widehat{EI}_\omega}{\widehat{EI}_{zz}} \left( 1 + \frac{\widehat{GI}_t}{\widehat{EI}_\omega} \frac{L^2}{k_{cr} \pi^2} \right)} \right). \quad (5.85)$$

Sie gilt sowohl für beidseitig gelenkig gelagerte als auch für einseitig eingespannte Strukturen. Für die Gleichungen (5.80) und (5.81) kann allgemein folgender Ausdruck präsentiert werden:

$$\widehat{Q}_{cr} = F_1 \widehat{N}_{crz}^B \left( F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1 \pm \sqrt{(F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1)^2 + \frac{\widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\widehat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.86)$$

$F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  sind konstante Parameter, die zum einen von der angreifenden Belastung und zum anderem von der Lagerung der betrachteten Struktur abhängen. Diese Parameter sind für alle betrachteten Belastungsarten in Abb. 5.12 gezeigt. Der Kippbeiwert  $k_{cr}$  hängt von der Lagerungsart ab. Bei einer beidseitig gelenkigen Lagerung gilt für den Kippbeiwert  $k_{cr} = 1$ . Ist das eine Ende eingespannt und das andere frei, wird normalerweise für den Kippbeiwert gleich ein Wert von 0,25 eingesetzt, jedoch wird bei dieser Formel auch bei dieser Lagerungsart  $k_{cr} = 1$  verwendet [135]. Abhängig von der Belastungsart erhält man auch eine dazugehörige kritische Belastung. Eine Streckenlast  $p$  sorgt für eine kritische Streckenlast  $\widehat{p}_{cr}$ . Jedoch wird zunächst immer ein kritisches Moment  $\widehat{Q}_{cr}$  berechnet. Für die kritische Streckenlast gilt  $\widehat{p}_{cr} = \frac{8\widehat{Q}_{cr}}{L^2}$ . Diese Zusammenhänge sind ebenfalls in der Abb. 5.12 hinterlegt.

Im den nachfolgenden Abschnitten sollen die ermittelten geschlossen-analytischen Lösungen der globalen Stabilitätsprobleme von Verbundträger diskutiert werden. Hierbei werden die Ergebnisse der Stabilitätsprobleme zwischen axialer bzw. lateraler Belastung unterschieden. Auch die im Kapitel zuvor bestimmten effektiven Steifigkeiten werden für die Analyse der globalen Stabilität benötigt.

Für die Stabilitätsprobleme infolge der Axiallast werden insgesamt drei Querschnittformen untersucht. Für jede Querschnittform werden zunächst die analytischen Lösungen für unterschiedliche Lagerungsbedingungen beschrieben. Im Nachhinein werden einige der analytischen Ergebnissen mit der Numerik verglichen. Desweiteren werden die Stabilitätsprobleme infolge der lateralen Lasten analysiert. Für die laterale Belastung wird nur die Querschnittsform eines I-Trägers untersucht, jedoch werden an dieser Stelle drei verschiedene Belastungsarten berücksichtigt und analysiert. Auch hier werden einige Fälle mithilfe der Numerik verifiziert.

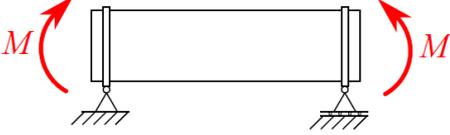
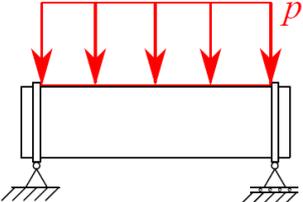
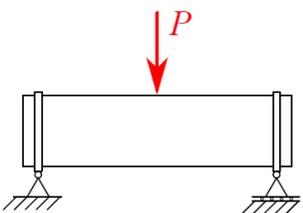
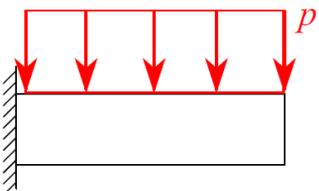
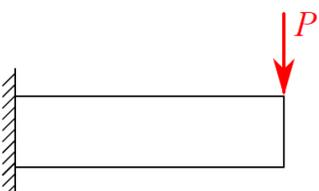
Lagerung & Belastung	kritische Last	Konstanten		
		$F_1$	$F_2$	$F_3$
	$\widehat{M}_{cr} = \widehat{Q}_{cr}$	1,000	0,000	0,500
	$\widehat{P}_{cr} = \frac{8\widehat{Q}_{cr}}{L^2}$	1,130	0,450	0,267
	$\widehat{P}_{cr} = \frac{4\widehat{Q}_{cr}}{L}$	1,350	0,550	0,212
	$\widehat{P}_{cr} = \frac{2\widehat{Q}_{cr}}{L^2}$	2,050	n.a.	n.a.
	$\widehat{P}_{cr} = \frac{\widehat{Q}_{cr}}{L}$	1,280	n.a.	n.a.

Abb. 5.12: Verschiedene Kippfälle.

## 5.2 Stabilitätsprobleme infolge der Axialbelastung

Für eine stabförmige Struktur, die unter einer Druckbelastung steht, können sich vier Stabilitätsformen einstellen. Hierzu gehört das Biegeknicken, sowohl um die  $y$ -Achse als auch um die  $z$ -Achse, sowie das Drillknicken um die  $x$ -Achse und das Biegedrillknicken, sowohl um die  $y$ -Achse als auch um die  $z$ -Achse. Die Stabilitätsfälle Biegeknicken und Drillknicken verhalten sich unabhängig voneinander und können mithilfe der in Abschnitt 5.1 hergeleiteten Theorie mit einer geschlossen-analytischen Knicklast verknüpft werden. Für bestimmte Querschnittsformen können die beiden Stabilitätsprobleme Biege- und Drillknicken gekoppelt voneinander auftreten. Diese Versagenart wird als Biegedrillknicken bezeichnet. Über die allgemeine kubische Gleichung

$$\left| \begin{bmatrix} \widehat{N}_{crz}^B & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{N}_{cry}^B & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2 \end{bmatrix} - \widehat{N}_{cr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_{sc} \\ 0 & 1 & -y_{sc} \\ z_{sc} & -y_{sc} & i_\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0, \quad (5.87)$$

kann die kritische Knicklast für beliebige Querschnittsformen unter variierbaren Randbedingungen ausgegeben werden. Bei Auflösung von Gleichung (5.87) ergeben sich drei Lösungen für die kritische Knicklast. Hierbei gilt, dass die kleinste der kritischen Lasten ausschlaggebend für die Stabstruktur ist. Um festzulegen, welches der genannten Stabilitätsprobleme relevant ist, werden die Positionsabstände  $y_{sc}$  und  $z_{sc}$  vom Flächenschwerpunkt bis zum Schubmittelpunkt des Querschnitts benötigt. In der vorliegenden Arbeit sollen nun für einige ausgewählte Querschnittsformen sowohl die analytischen als auch numerischen Ergebnisse präsentiert werden.

### 5.2.1 I-Profil

#### Analytische Auswertung

Zunächst sollen die analytischen Lösungen eines I-Träger analysiert werden. Um die kritische Knicklast berechnen zu können, werden die Abmessungen und Lagenaufbauten des Kapitels 3 und die effektiven Steifigkeiten aus der Tabelle 4.7 benötigt. Bei einem I-Träger liegt der Schubmittelpunkt auf dem Flächenschwerpunkt, sodass die Abstände  $y_{sc}$  und  $z_{sc}$  gleich Null sind. Bei Auflösung der kubischen Gleichung (5.87), erhält man folgende drei Lösungen für die kritische Knicklast, die unabhängig voneinander sind:

$$\hat{N}_{cry}^B = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{yy}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xz\text{-Ebene,} \quad (5.88)$$

$$\hat{N}_{crz}^B = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \quad \text{Biegeknicken in der } xy\text{-Ebene,} \quad (5.89)$$

$$\hat{N}_{cr\psi}^B = \frac{1}{i_\omega^2} \left( k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_\omega}{L^2} + \widehat{GI}_t \right) \quad \text{Drillknicken um die } x\text{-Achse.} \quad (5.90)$$

Für die Beantwortung der Frage welcher dieser Knicklasten ausschlaggebend ist, werden die Lösungen der drei Gleichungen (5.88), (5.89) und (5.90) über die Balkenlänge  $L$  präsentiert. Hierbei wird der I-Träger mit der Laminat-Konfiguration C versehen und für alle vier Eulerfälle untersucht. Aus Abbildungen 5.13-5.16 ist zu entnehmen, dass sich die kritische Knicklast mit steigender Balkenlänge verringert. Ein Vergleich der einzelnen Verläufe eines Graphens zeigt, dass der Stabilitätsfall Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene über der Balkenlänge  $L$  den niedrigsten Wert aufweist. Dementsprechend ist das Biegeknicken um die  $z$ -Achse der ausschlaggebende Stabilitätsfall. Die zweitniedrigste Knicklast würde ein Drillknicken hervorrufen. Bei den Eulerfällen 2, 3 und 4 kann ein geringfügiger Unterschied zwischen den Fall Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene und dem Drillknicken festgestellt werden. Bei einem Vergleich für alle vier Eulerfälle der unterschiedlichen Laminat-Konfigurationen untereinander können folgende Ergebnisse generiert werden. In den Abbildungen 5.17-5.20 können nur geringfügige Unterschiede zwischen den untersuchten Konfigurationen festgestellt werden. Diese Lösungsform stellt sich für alle vier untersuchten Eulerfälle ein. Vergleicht man nur die niedrigsten Knicklasten der unterschiedlichen Randbedingungen miteinander, ist zu erkennen, dass die kritische Knicklast beim Eulerfall 4 (beidseitig eingespannter Balken) den höchsten Wert erreicht. Auch über die Länge des Balkens bleibt

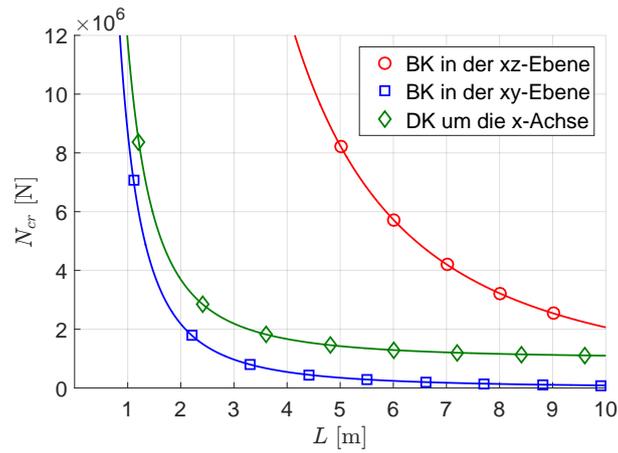


Abb. 5.13: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall I.

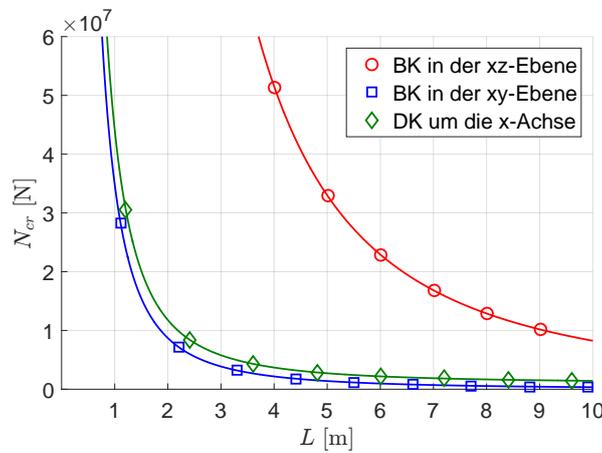


Abb. 5.14: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall II.

sie im Vergleich zu den anderen Fällen am höchsten. Die nächste größere Knicklast stellt sich beim Eulerfall 3 ein. Anschließend folgt der Fall 2, der beidseitig gelenkig gelagert

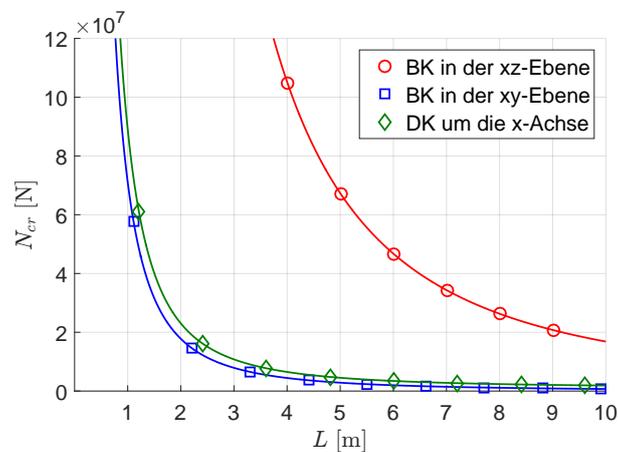


Abb. 5.15: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall III.

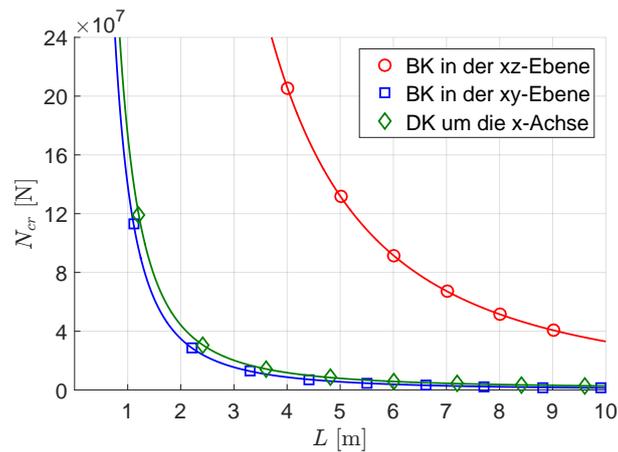


Abb. 5.16: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall IV.

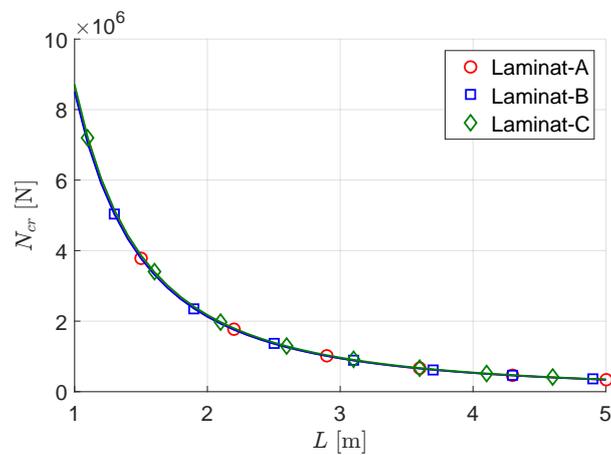


Abb. 5.17: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall I.

ist. Die niedrigste Knicklast entsteht beim Eulerfall 1. Eine Begründung für die Verteilung

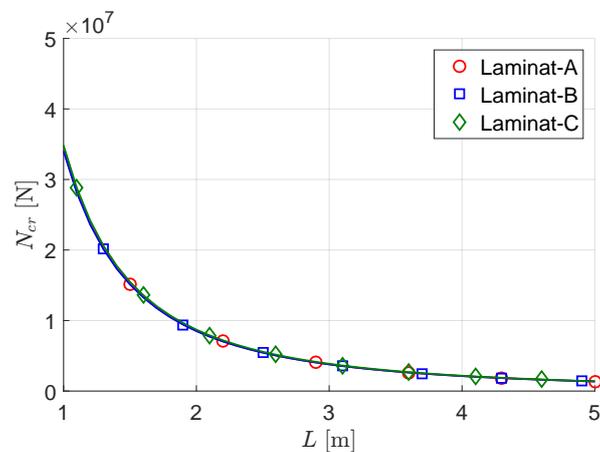


Abb. 5.18: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall II.

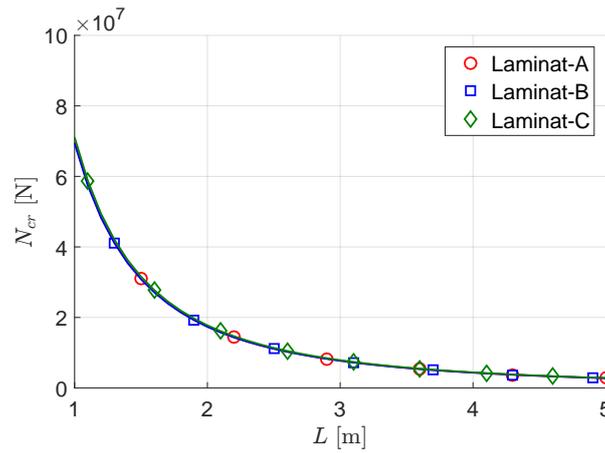


Abb. 5.19: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall III.

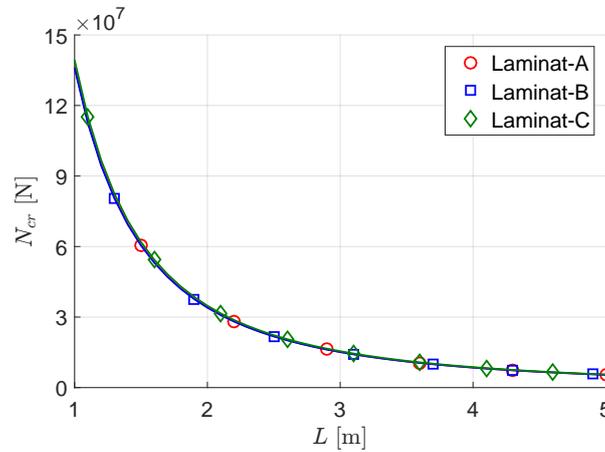


Abb. 5.20: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall IV.

der Lasten ist der Wert des Knickbeiwertes. Je höher der Knickbeiwert ist, desto größer ist auch die Knicklast.

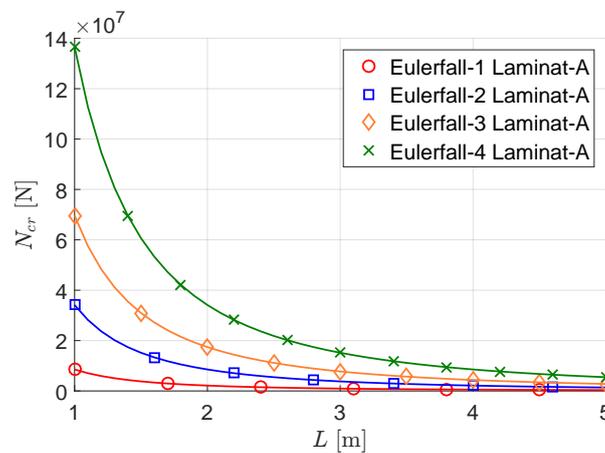


Abb. 5.21: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für Laminat A.

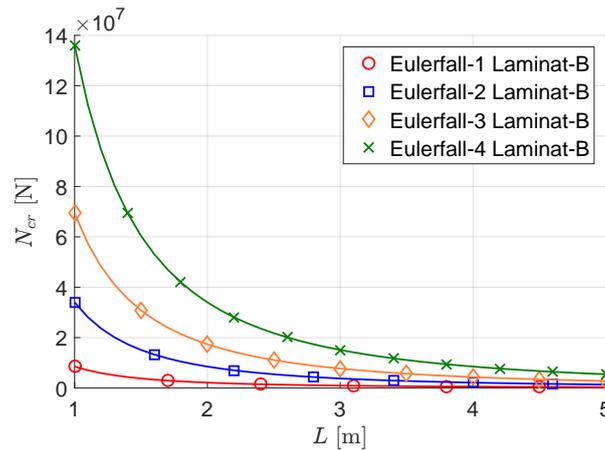


Abb. 5.22: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für Laminat B.

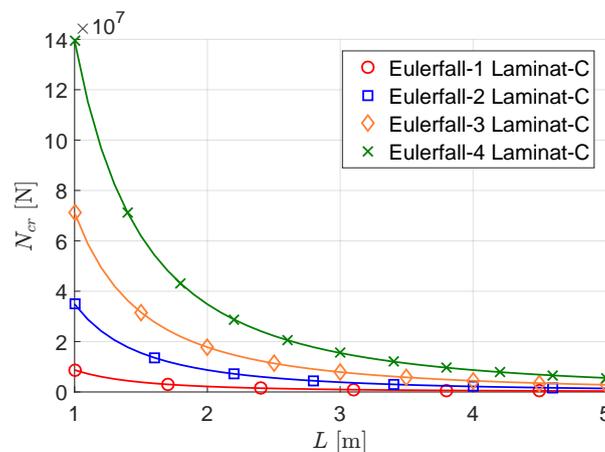


Abb. 5.23: Theoretische kritische Last über die Länge eines I-Profiles für Laminat C.

## Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt wird mithilfe der Numerik versucht, die dargestellten geschlossen-analytischen Lösungen zu verifizieren. Für den I-Träger werden zwei explizite Randbedingungsfälle, die unter einer Druckbelastung stehen, untersucht. Zum einen soll der Eulerfall 1 analysiert werden. Bei diesem Randbedingungsfall besitzt die Balkenstruktur bei  $x = 0$  eine feste Einspannung. Das Ende  $x = L$  verfügt über keine geometrischen Einschränkungen. Um akzeptable Ergebnisse aus der FEM zu erhalten, müssen folgende Lagerungen am I-Träger angebracht werden. Sowohl die translatorischen als auch rotatorischen Freiheitsgrade der Knotenpunkte am Rand  $x = 0$  werden blockiert. Die Randbedingungen können an jeden einzelnen Knotenpunkt des Randes  $x = 0$  angebracht werden. Eine weitere Möglichkeit wäre, eine nicht elastische RBE-Spinne über einen Masterknoten zu verbinden. Dementsprechend müssen die Freiheitsgrade nur für den gewählten Masterknoten die Freiheitsgrade gesperrt werden. Die axiale Druckbelastung wird über eine elastische RBE-Spinne eingesetzt. Hierbei werden die Knotenpunkte am Ende  $x = L$  mit einem weiteren Masterknoten, auf die sich die Einwirkungen beziehen, miteinander verbunden. Über diese Konstellation wird eine gleichmäßige Kraftverteilung gewährleistet.

In Abbildung 5.25 sind die Ergebnisse der kritischen Knicklasten über die Balkenlänge wiedergegeben, wobei sowohl die geschlossen-analytische als auch die numerische Lö-

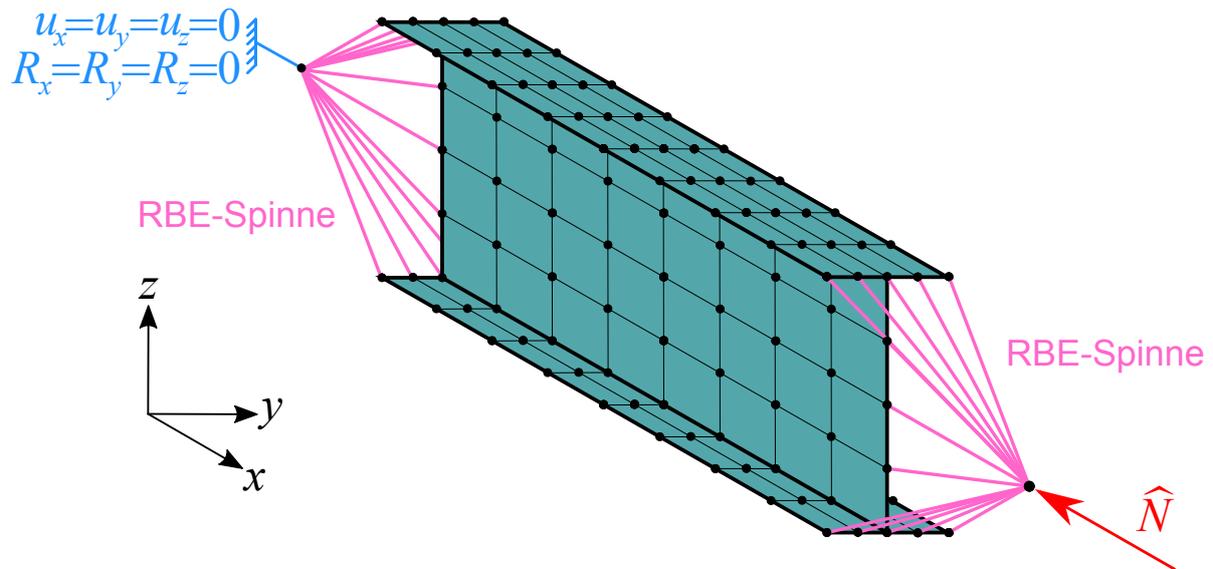


Abb. 5.24: Randbedingungen und Einwirkungen eines I-Profiles für den Eulerfall 1.

sung dargestellt wird. Für die Abmessungen und Lagenaufbauten wurde beispielhaft die Laminat-Konfiguration C verwendet. Für die theoretische Lösung ist zu erkennen, dass die kritische Knicklast bei niedrigen Balkenlängen gegen unendlich läuft. Mit zunehmender Länge lässt sich hingegen feststellen, dass die analytische Knicklast sinkt.

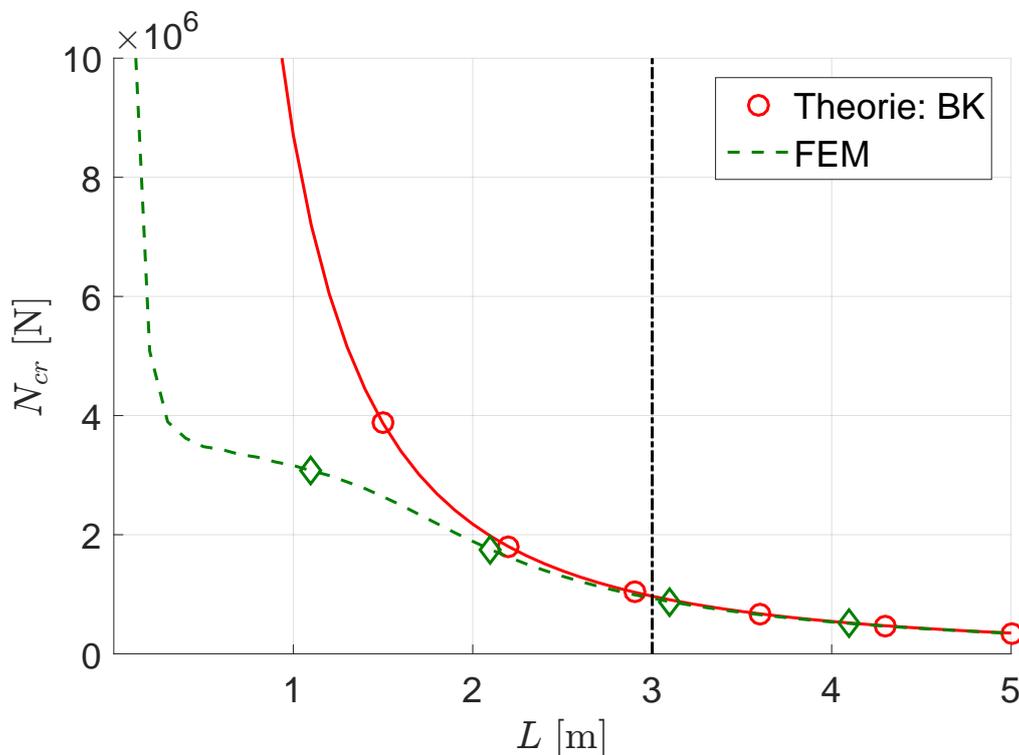


Abb. 5.25: Eulerfall 1: Kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

Beim einem Vergleich des analytischen Verlaufs mit der numerischen Kurve entstehen zwei Lösungsbereiche. Bei Balkenlängen ab  $L = 3$  m stellt sich für den Composite-Träger

die globale Versagensform Biegeknicken in  $xz$ -Ebene ein. Bei diesen bzw. höheren Längenbereichen können identische Verläufe der kritischen Knicklast registriert werden. Die Analytik liefert damit also eine geeignete Darstellung für das globale Versagen der Geometrie.

Die Ergebnisse der FEM zeigen, dass bei kurzen Balkenlängen ein völlig unterschiedlicher Verlauf der kritischen Knicklast entsteht. In Bezug auf die Eigenform der Balkenstruktur bei niedrigen Längen können Stabilitätsprobleme entdeckt werden, die nicht der globalen Versagensform zuzuordnen sind. Wie Abbildung 5.25 verdeutlicht, stellt sich eine Kombination aus globalen Stabilitätsproblemen und lokalen Versagensformen ein. Mit den bisherigen Ergebnissen können jedoch nur die globalen Stabilitätsprobleme dargestellt werden. Aus diesem Grund werden für kleine Balken große Abweichungen aus den Lösungen entstehen. Bei kleinen Balkenlängen stellen sich Eigenformen ein, die in den beiden nachfolgenden Abbildungen dargestellt sind. Die Abbildung zeigen ebenfalls, wie

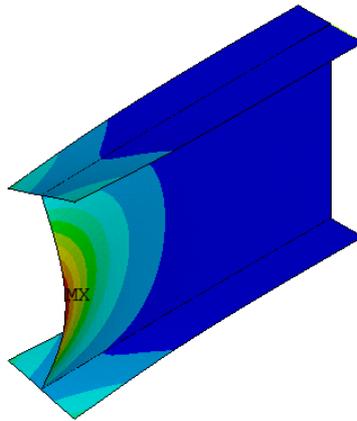


Abb. 5.26: Eigenform eines I-Profiles für den Eulerfall 1,  $L = 1\text{m}$ .

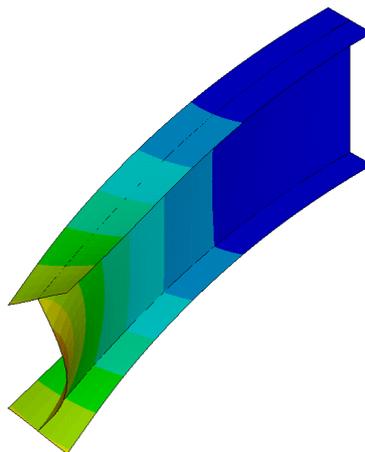


Abb. 5.27: Eigenform eines I-Profiles für den Eulerfall 1,  $L = 2\text{m}$ .

sich der Steg verformt. Es stellt sich eine Halbwelle kurz vor dem Rand  $x = L$  ein, die etwa bis zur Mitte der Balkenlänge verläuft. An der Einspannung  $x = 0$  können keine Deformationen gefunden werden. Auch die beiden Gurte besitzen im Vergleich zum Steg kleine Verschiebungen, jedoch kein Ansatz auf eine Beulform. Die maximale Verschiebung

kann am äußeren Rand  $x = L$  entdeckt werden. Für den I-Träger mit  $L = 1\text{ m}$  wird eine einwirkende Drucklast von  $\hat{N}_x = 3,2 \cdot 10^6\text{ N}$  benötigt, um die kritische Knicklast zu erreichen. Bei einer Erhöhung der Balkenlänge auf 2 m können recht ähnliche Verformungen der Struktur ermittelt werden, wobei eine zusätzliche Auslenkung in Richtung der  $y$ -Achse festzustellen ist. Auch hier lässt sich eine Kopplung des lokalen und globalen Versagens ermitteln. Dabei beult der Steg des Trägers aus, und gleichzeitig entsteht ein Biegeknicken der gesamten Balkenstruktur in der  $xy$ -Ebene. In der Fachliteratur wird diese Kombination als Gesamtstabilität bezeichnet. Die notwendige Knicklast beträgt bei dieser Balkenlänge einen Wert von  $\hat{N}_{cr} = 1,9 \cdot 10^6\text{ N}$ .

Für eine Balkenlänge von 5 m stellt sich das globale Stabilitätsproblem Biegeknicken in Richtung der  $y$ -Achse ein. In Abbildung 5.28 ist die Eigenform, die bei der kleinsten auftretenden Knicklast entstand, in der  $xy$ -Ebene dargestellt.

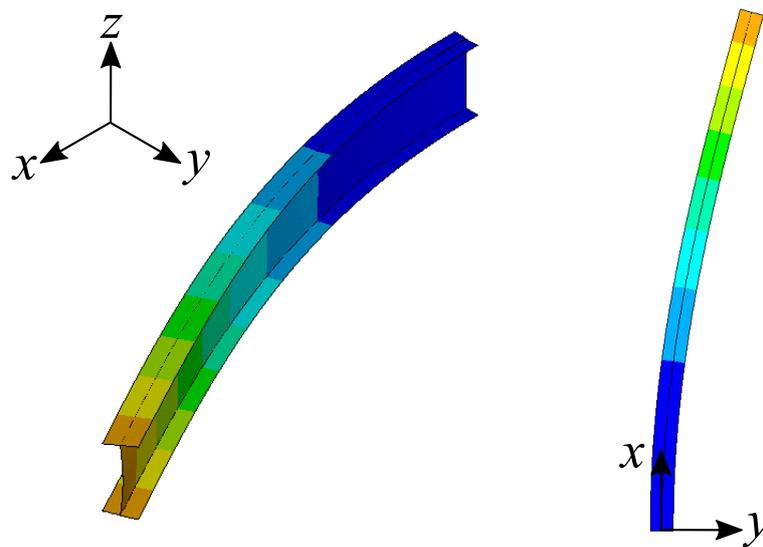


Abb. 5.28: Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene eines I-Träger beim Eulerfall 1.

Die sich einstellende Eigenform besitzt die erwartete Knickform nach dem Eulerfall 1. Die Verschiebung am Rand  $x = 0$  ist gleich Null. Mit zunehmender Länge vergrößert sich die Verschiebung in Richtung der  $y$ -Achse bis zum Ende  $x = L$ . Dementsprechend kann bei  $x = L$  die größte Verschiebung festgestellt werden. Die kritische Knicklast nimmt hierbei einen Wert von  $\hat{N}_{cr} = 0,3 \cdot 10^6\text{ N}$  an.

Im nächsten Schritt soll der Eulerfall 2 analysiert werden. Für diesen Randbedingungsfall werden die Ränder  $x = 0$  und  $x = L$  mit gelenkigen Lagerungen versehen. Für den Rand  $x = 0$  müssen alle drei translatorischen Verschiebungen gesperrt werden, wobei beim Ende  $x = L$  die  $x$ -Richtung nicht blockiert werden darf. Um diese Prämissen in einem zweidimensionalen FE-Modell umzusetzen zu können, werden folgende Randbedingungen angewandt:

- Blockierung der Verschiebung in  $x$ -Richtung eines beliebigen Punkts am Rand  $x = 0$
- an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  der Gurte die Freiheitsgrade in  $z$ -Richtung sperren
- Nullsetzung der translatorischen Verschiebungen in Richtung der  $y$ -Achse für die Stegenden

- Gabel Lagerung an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  (Sperrung der  $y$ -Verschiebungen an den Eckpunkten).

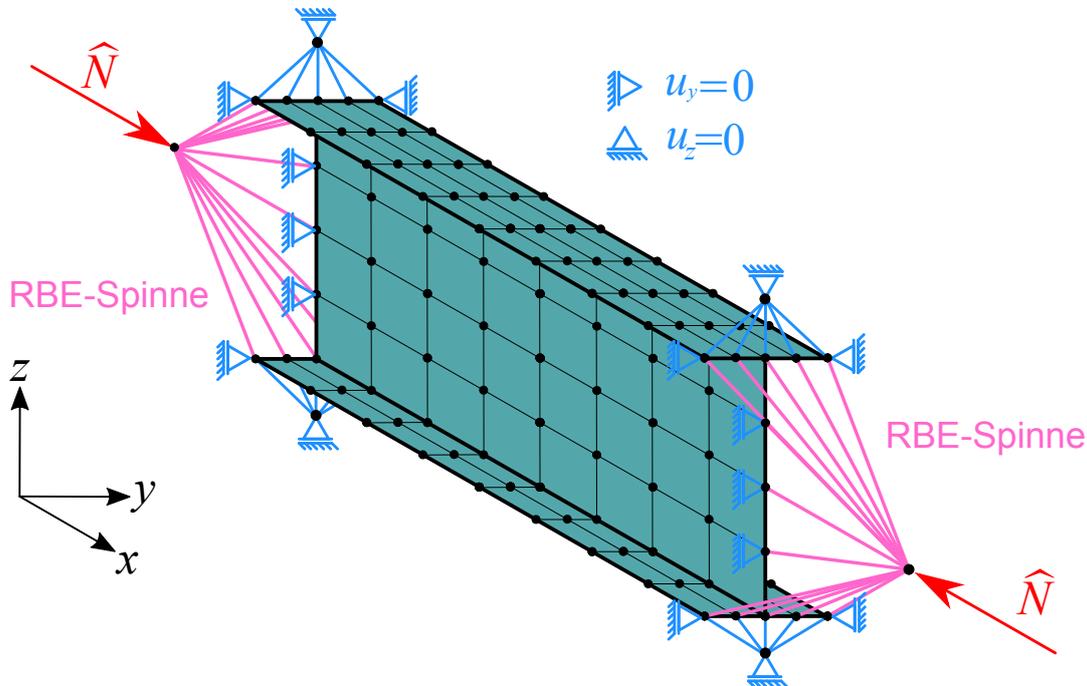


Abb. 5.29: Randbedingungen und Einwirkungen eines I-Profiles für den Eulerfall 2.

Für diesen Fall werden zwei entgegengesetzte axiale Drucklasten auf die Struktur einwirken (siehe Abbildung 5.29). Sowohl am Rand  $x = 0$  als auch am Ende  $x = L$  werden mithilfe der RBE-Spinne die Belastungen eingeleitet. Die RBE-Spinnen sind mit den dazugehörigen Rändern verknüpft.

Sowohl die geschlossen-analytische als auch die numerische Lösung der kritischen Knicklast über die Balkenlänge können aus der Abbildung 5.30 entnommen werden. Auch für diesen Randbedingungsfall wird die Laminat-Konfiguration C analysiert. Die theoretische Lösung der kritischen Knicklast verläuft bei immer niedriger werdenden Balkenlängen gegen unendlich. Für diesen Fall stellen sich globale Stabilitätsprobleme erst ein, wenn die Balkenlänge 4 m erreicht. Ab dieser Länge kann für die Composite-Struktur ein Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene festgestellt werden. Bei einem Vergleich der numerischen Lösungen mit der Analytik können hervorragende Ergebnisse mithilfe der geschlossen-analytischen Formel erzeugt werden. Bei kleinen Balkenlängen können sich reine lokale Versagensformen bilden. Außerdem kann sich ein Gesamtstabilitätsproblem einstellen. Die numerische Lösung weist bei Trägerlängen, die unter 2 m sind, reine lokale Versagensformen auf. Gemäß Abbildung 5.30 lassen sich für diesen Bereich Girlandenkurven erkennen, die eine Angabe machen, wie viele Halbwellen sich in der betrachteten Struktur einstellen. Für Längen von 2 bis 4 m, gibt die numerische Lösung an, dass ein Stabilitätsproblem auftritt, das lokale und globale Versagensformen miteinander verbindet (siehe Abbildung 5.32).

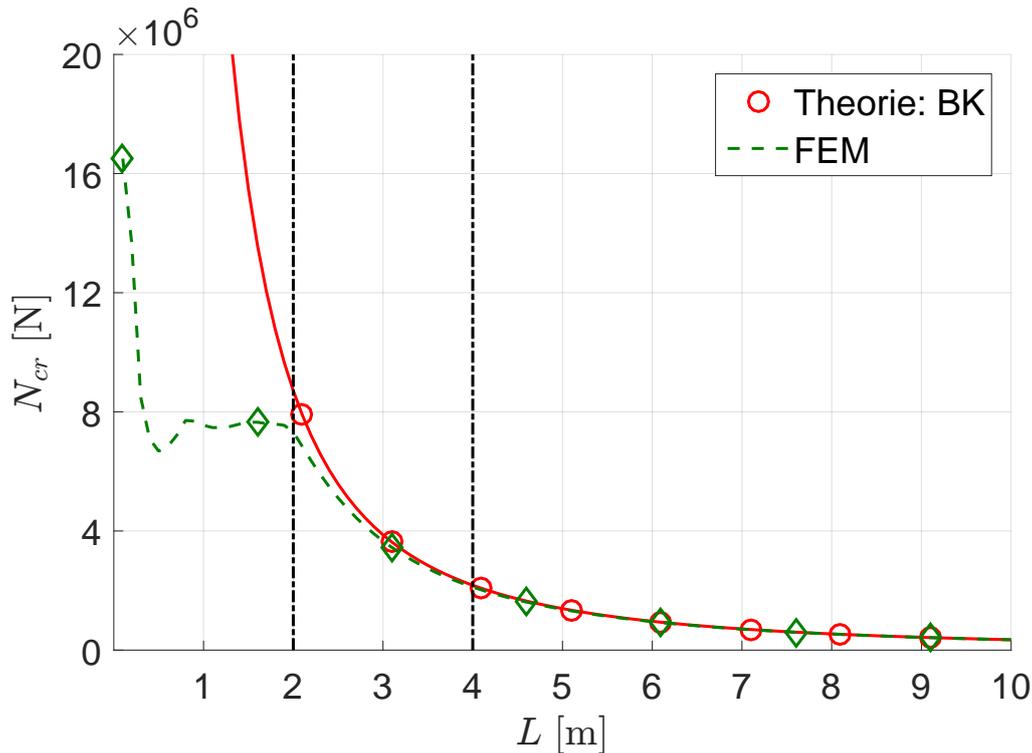


Abb. 5.30: Eulerfall 2: Kritische Last über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

Aus dem FEM-Post-Processing können für eine Balkenlänge von 1 m keine globalen Versagensformen der Struktur festgestellt werden. Stattdessen versagt die Balkenstruktur rein lokal. Es stellt sich für die kritische Knicklast ein Wert von  $\hat{N}_{cr} = 7,5 \cdot 10^6$  N ein. In Abbildung 5.31 sind die genauen Beulformen des Composite-Balkens zu erkennen. Aufschlussreich, dass sowohl der Steg als auch die beiden Gurte lokal versagen. Beim Steg stellen sich zwei Halbwellen ein. Die maximale Auslenkung der Beulen im Steg tritt ca. bei den Längen  $x=0,25$  m und  $x=0,75$  m ein. Des Weiteren entstehen lokale Versagensformen an den Gurten. Auch in den Gurten können Beulformen, die sinusförmig verlaufen, entdeckt werden. Die größte entstehende Verformung kann am äußeren Rand des Gurtes festgestellt werden. Die Position der maximalen Ausdehnung befindet sich ebenfalls bei den Koordinatenwerten  $x=0,25$  m bzw.  $x=0,75$  m. Im Übergang zwischen Gurt und Steg können keine Verformungen identifiziert werden. Für einen I-Composite-Träger mit einer Balkenlänge von 2 m können im Vergleich zum selben Träger, der nur 1 m lang ist, erhebliche Unterschiede in Bezug auf die Beulform festgestellt werden. Zunächst ist in Abbildung 5.32 zu erkennen, dass die Balkenstruktur in Richtung der  $y$ -Achse knickt. Neben dem Biegeknicken stellen sich sowohl im Steg als auch im Gurt lokale Versagensformen ein. An dieser Stelle kann eine Beule beim Steg identifiziert werden, die sich über die gesamte Länge des Balkens streckt. Hierbei tritt die größte Auslenkung im Flächenschwerpunkt des Steges auf. An den Gurten hingegen können keine ausgeprägten lokalen Beulphänomene entdeckt werden. Mit einer Druckbelastung von  $\hat{N}_x = 7,5 \cdot 10^6$  N würden bei dieser Konstellation genau die eben beschriebenen Eigenformen auftreten.

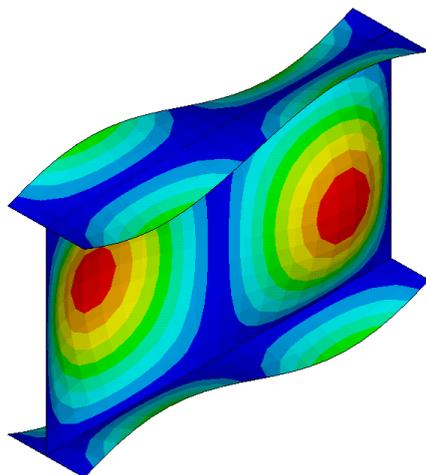


Abb. 5.31: Eigenform eines I-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 1\text{m}$ .

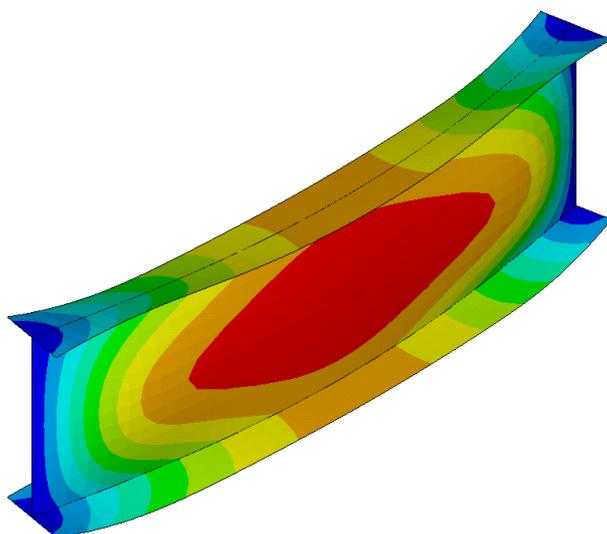


Abb. 5.32: Eigenform eines I-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 2\text{m}$ .

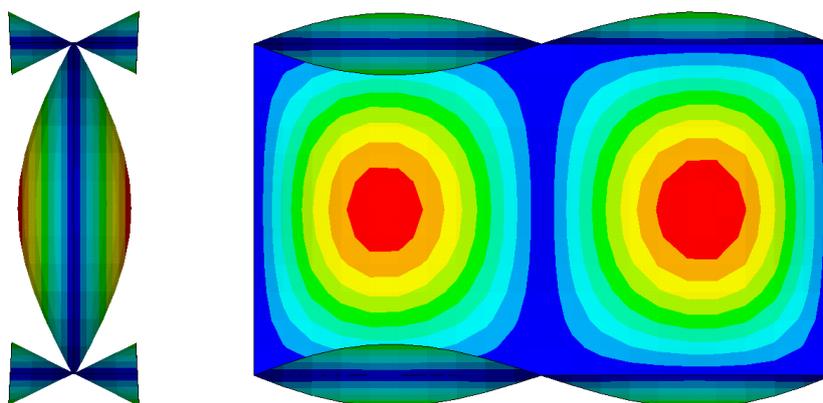


Abb. 5.33: Lokales Beulen eines I-Träger beim Eulerfall 2.

Zum Schluss soll noch eine Balkenlänge von 5 m analysiert werden. Abbildung 5.34 zeigt, dass die untersuchte Struktur knickt. Hierbei lenkt sich der Balken seitlich aus in Richtung der  $y$ -Achse, weil die effektive Biegesteifigkeit um die  $z$ -Achse niedriger ist als  $\widehat{EI}_{yy}$ .

Die rechte Darstellung in Abbildung 5.34 präsentiert die sich einstellende Eigenform in der  $xy$ -Ebene. Die geometrische Ausrichtung der Eigenform macht deutlich, dass die Knickform erwartungsgemäß von den verwendeten Randbedingungen in der FEM erfüllt wird. Für den Eulerfall 2 wird der Composite-Träger an beiden Enden gelenkig gelagert. Dementsprechend stellt sich die maximale Ausdehnung in der Balkenmitte ein. An den äußeren Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  können keinerlei Verschiebungen erfasst werden. Die sich hier einstellende kritische Knicklast beträgt  $\hat{N}_x = 7,4 \cdot 10^6 \text{N}$ .

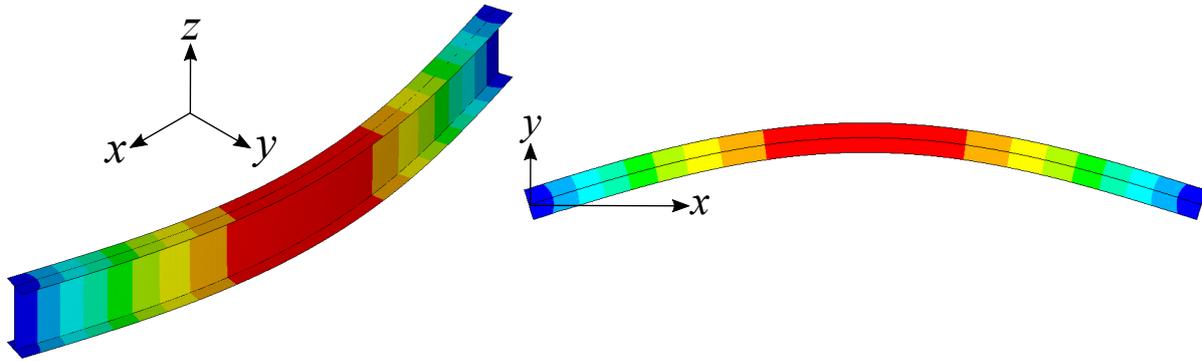


Abb. 5.34: Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene eines I-Träger beim Eulerfall 2.

Hinsichtlich der eben präsentierten Lösungen kann festgelegt werden, dass die hergeleiteten geschlossen-analytischen Lösungen sehr gute Ergebnisse liefern. Jedoch gelten die Lösungen nur für reine globale Stabilitätsprobleme. Lokale oder Kombinationen aus globalen und lokalen Eigenformen können nicht mit diesen Lösungen abgebildet werden.

## 5.2.2 C-Profil

### Analytische Auswertung

In diesem Abschnitt sollen die ermittelten geschlossen-analytischen Lösungen der kritischen Knicklast für diverse C-Träger präsentiert werden. Für die analytische Auswertung werden drei verschiedene Geometrien des C-Profiles untersucht (siehe Abbildung 5.35). Ein C-Träger setzt sich aus zwei Gurten und einem Steg zusammen. Die Abmessungen in

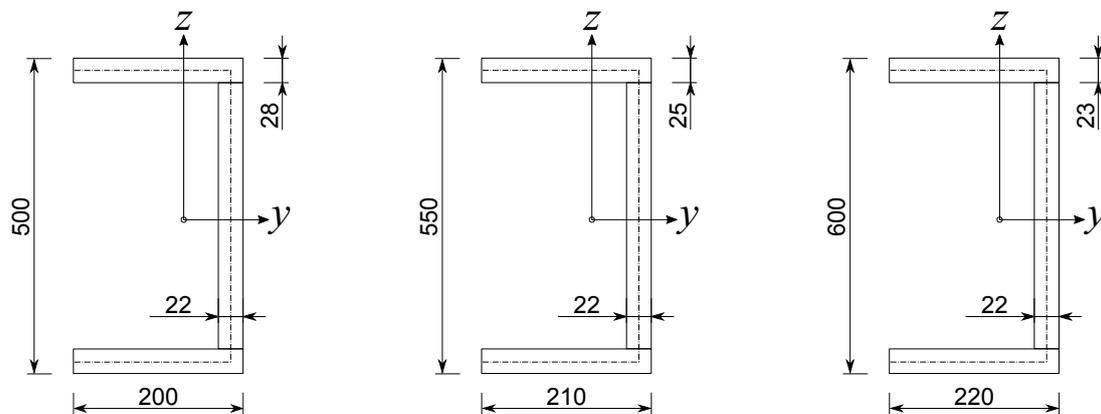


Abb. 5.35: Abmessungen der untersuchten C-Profile.

Abbildung 5.35 besitzen die Einheit Millimeter. Wie beim I-Träger besitzt das C-Profil

zur  $y$ -Achse einen symmetrischen Querschnitt. Da sich zur  $z$ -Achse ein unsymmetrischer Querschnitt einstellt, befindet sich der Flächenschwerpunkt nicht in der Querschnittskontur. Der Schubmittelpunkt eines C-Trägers liegt nicht auf dem Flächenschwerpunkt (siehe Abbildung 5.36). Das Maß  $z_{sc}$  ist gleich Null, weil der SMP auf der  $y$ -Achse liegt. Für den Abstand  $y_{sc}$  stellt sich hingegen ein Wert ein. Der Schubmittelpunkt befindet

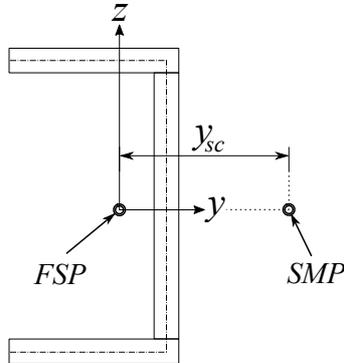


Abb. 5.36: Flächen- und Schubmittelpunkt eines C-Profiles.

sich dementsprechend außerhalb des Umrisses. Die Anzahl der Lagen und die dazugehörigen Orientierungen für Gurte und Stege können Tab. 5.1 entnommen werden. Für die Analyse der kritischen Knicklast werden die effektiven Steifigkeiten der C-Träger benötigt. Hierfür wird das Profil in drei Segmente zerlegt. Die einzelnen Segmente werden mit den folgenden dargestellten Bemaßungen und Achsenbeschriftungen versehen. Für die

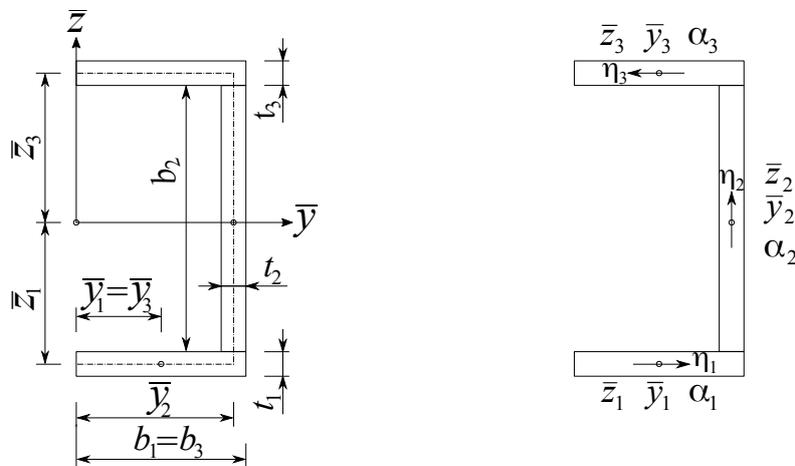


Abb. 5.37: Geometrische Parameter für ein C-Träger.

drei Laminat-Konfigurationen A, B und C sind die Zahlenwerte der Parameter der Tab. 5.2 zu entnehmen. Die Beschreibung der dargestellten Parameter finden sich in Abschnitt 4.2.2. Für die Konfigurationen stellen sich folgende effektive Steifigkeiten ein, wobei einige Steifigkeiten gleich Null sind und dementsprechend nicht aufgelistet sind: Da der Schubmittelpunkt nicht auf dem Flächenschwerpunkt liegt,  $y_{sc} \neq 0$ , gibt es nach der Auflösung der kubischen Gleichung (5.87) drei Lösungen, von denen zwei eine Kopplung zwischen Biege- und Drillknicken hervorbringen. Die zwei Lösungen beschreiben das Biegedrillknicken in der  $xz$ -Ebene. Die andere Lösung bildet das Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene. Folgende geschlossen-analytische Lösungen der kritischen Knicklast können angegeben werden:

Laminat-Konfiguration	Segment $k$	$b_k$ [m]	$t_k$ [m]	$\bar{z}_k$ [m]	$\bar{y}_k$ [m]	$\alpha_k$ [°]
A	1	0,200	0,028	-0,236	0,100	0
	2	0,444	0,022	0	0,189	90
	3	0,200	0,028	0,236	0,100	180
B	1	0,210	0,025	-0,2625	0,105	0
	2	0,500	0,022	0	0,199	90
	3	0,210	0,025	0,2625	0,105	180
C	1	0,220	0,023	-0,2885	0,110	0
	2	0,554	0,022	0	0,209	90
	3	0,220	0,023	0,2885	0,110	180

Tabelle 5.1: Parameter für ein C-Profil mit den Laminat-Konfigurationen A, B und C.

Laminat-Konfiguration	$\widehat{EA}$ [N]	$\widehat{EI}_{yy}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_{zz}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{GI}_t$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{yy},\vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{zz},\vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_\omega$ [Nm <sup>4</sup> ]
A	1379117023	63316207	5508547	63547	-62	139	252860
B	1322438392	72471886	5870081	63971	-45	157	326634
C	1302415533	83588180	6355976	66326	-73	174	421135

Tabelle 5.2: Effektive Steifigkeiten eines C-Profiles mit den Laminat-Konfigurationen A, B und C.

1. Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene:

$$N_{cr1} = N_{crz}^B, \quad (5.91)$$

2. Biegedrillknicken auf der  $xz$ -Ebene:

$$N_{cr2} = \frac{i_\omega}{2(i_\omega^2 - y_{sc}^2)} \left[ i_\omega (N_{cry}^B + N_{cr\psi}^B) + \sqrt{i_\omega^2 (N_{cry}^B - N_{cr\psi}^B)^2 + 4N_{crz}^B N_{cr\psi}^B y_{sc}^2} \right], \quad (5.92)$$

3. Biegedrillknicken auf der  $xz$ -Ebene:

$$N_{cr3} = \frac{i_\omega}{2(i_\omega^2 - y_{sc}^2)} \left[ i_\omega (N_{cry}^B + N_{cr\psi}^B) - \sqrt{i_\omega^2 (N_{cry}^B - N_{cr\psi}^B)^2 + 4N_{crz}^B N_{cr\psi}^B y_{sc}^2} \right], \quad (5.93)$$

wobei für  $N_{crz}^B$ ,  $N_{cry}^B$  und  $N_{cr\psi}^B$  die Gleichungen (5.88) bis (5.90) gelten.

Um die Frage zu beantworten welche der dargestellten Knicklasten am bedeutsamsten ist, werden in den folgenden Abbildungen die kritischen Knicklasten über die Balkenträgerlänge  $L$  miteinander verglichen. Die kritische Knicklast verringert sich mit steigender

Balkenlänge. Da in den Abbildungen 5.38-5.41 zu den kritischen Knicklasten zwischen den Stabilitätsfällen Biegedrillknicken und Biegeknicken keine eindeutige Unterscheidung getroffen werden kann, wurden im weiteren Verlauf weitere Graphen produziert. Für diese Abbildungen wurde die Ordinate um eine Zehnerpotenz reduziert. Für die Abszissen sollen die gleichen Intervalle beibehalten werden. In Abbildung 5.38 kann für Balkenlängen

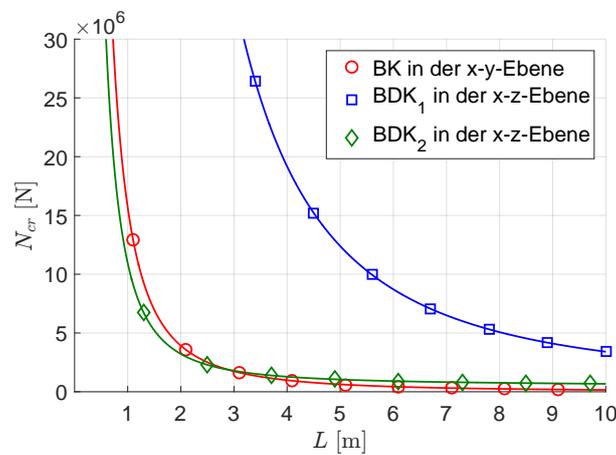


Abb. 5.38: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall I.

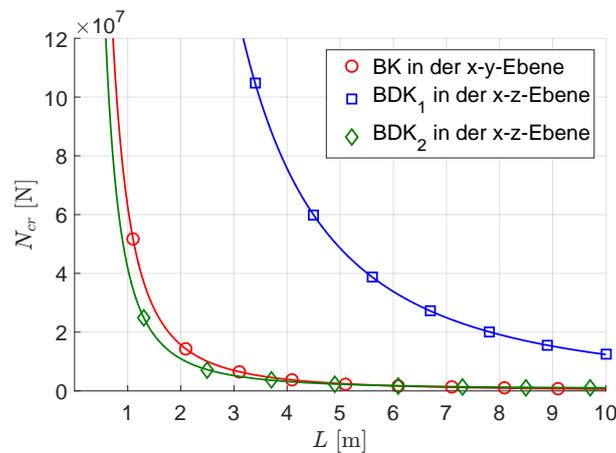


Abb. 5.39: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall II.

bis zu 2,9 m das Biegedrillknicken in der  $xz$ -Ebene als ausschlaggebendes Stabilitätsproblem angegeben werden. Darüber hinausreichende Balkenlänge werden an Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene versagen. Auch für den Eulerfall 2, beidseitig gelenkig gelagert, kann eine Veränderung des Stabilitätsproblems mit zunehmender Balkenlänge festgestellt werden. Hierbei tritt Biegedrillknicken bei Längen bis zu 5,8 m ein. Größere Strukturen würden wiederum um die  $z$ -Achse ausknicken. Der Verlauf der kritischen Knicklast in Abbildung 5.40 zeigt den Wechsel von Biegedrillknicken zu Biegeknicken erst bei einer Länge von 8,3 m. Für den Eulerfall 4, beidseitig eingespannt, ergibt die analytische Lösung, dass die kleinste kritische Knicklast ein Biegedrillknicken auf  $xz$ -Ebene hervorruft. Bis zu einer Balkenlänge von 10 m kann kein Wechsel zwischen den unterschiedlichen globalen der Stabilitätsversagensformen festgestellt werden. Im nächsten Schritt sollen die kritischen

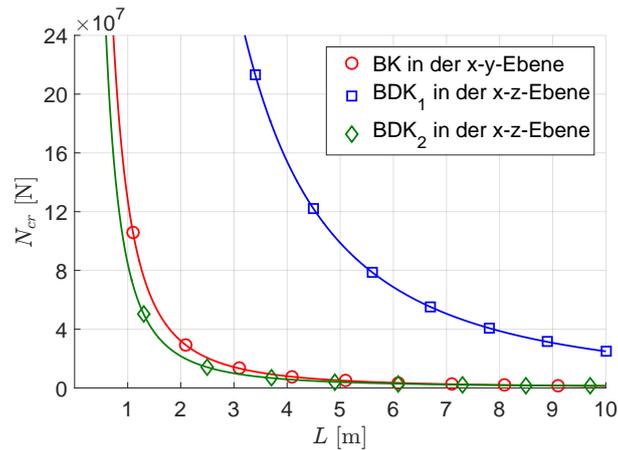


Abb. 5.40: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall III.

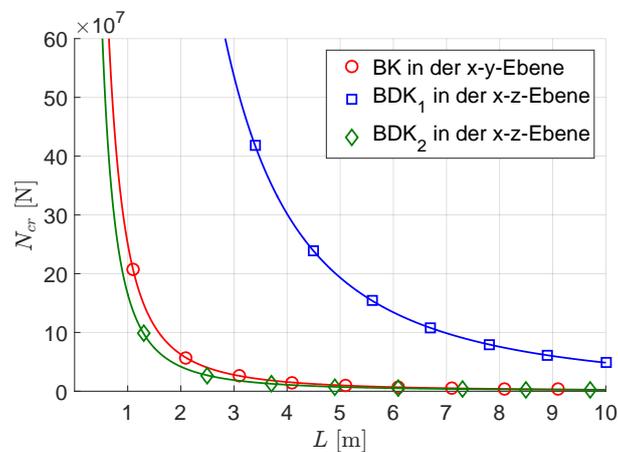


Abb. 5.41: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall IV.

Knicklasten für die unterschiedlichen Laminat-Konfigurationen miteinander verglichen werden. Für die Randbedingungen sollen die vier Eulerfälle herangezogen werden. In den

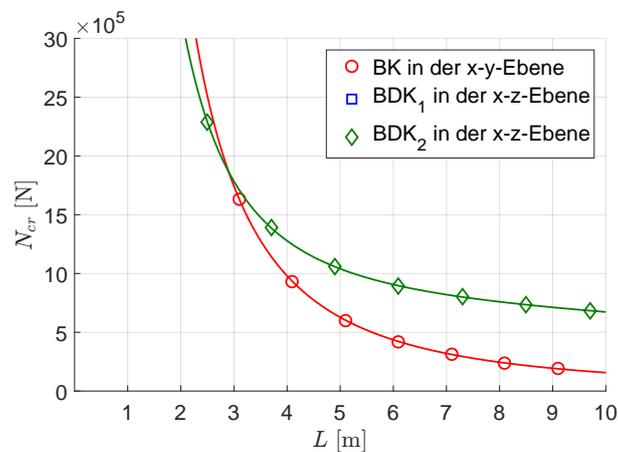


Abb. 5.42: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall I.

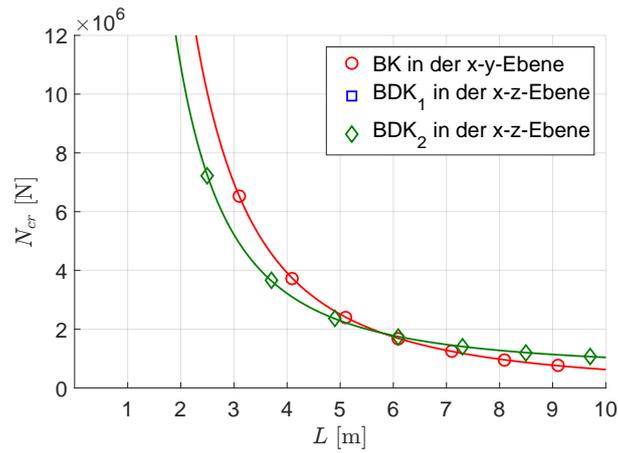


Abb. 5.43: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall II.

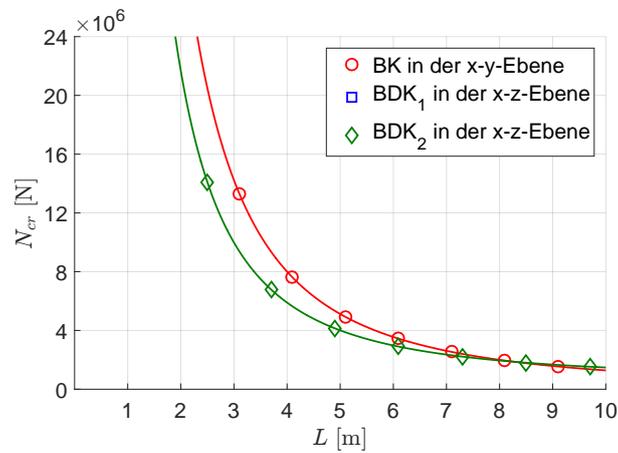


Abb. 5.44: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall III.

Abbildungen 5.46-5.49 sind die kritischen Knicklasten für das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken über die Balkenlänge abgebildet. Hierbei werden die untersuchten Laminat-

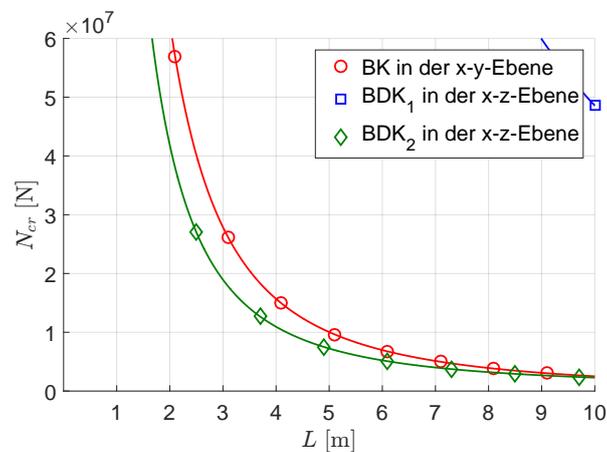


Abb. 5.45: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C, Euler-Fall IV.

Konfigurationen miteinander verglichen. Bezüglich der Abbildung 5.46 lässt sich feststellen, dass die Konfiguration A bis zur einer Länge von 3 m die geringste Knicklast aufweist.

Die Konfiguration B erzielt die zweit kleinste Knicklast. Ab einer Balkenlänge von 3 m

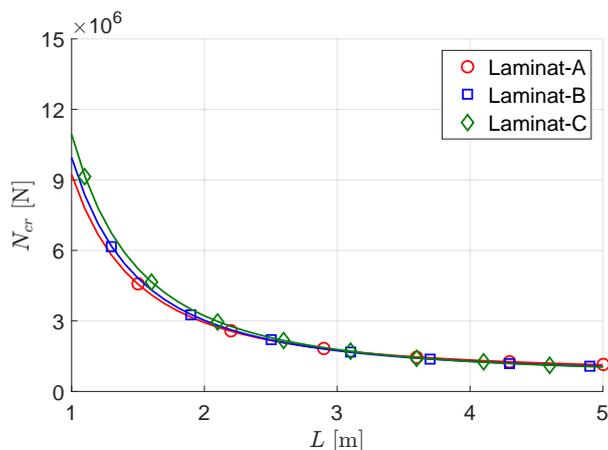


Abb. 5.46: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall I.

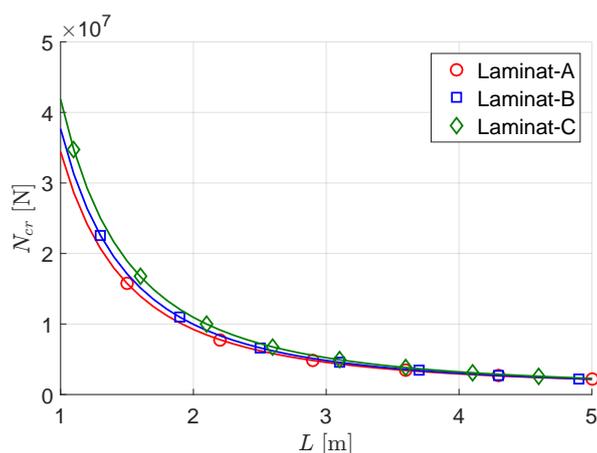


Abb. 5.47: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall II.

zeigt sich, dass die Konfiguration C die niedrigste Knicklast hervorruft. Das Laminat A hingegen erzeugt die größte Knicklast. Für die anderen Eulerfälle stellen sich dieselben Ereignisse ein, wobei sich der Wechsel der kleinsten Knicklast bei größeren Balkenlängen einstellt. Allgemein lässt sich feststellen, dass das Laminat C bei kleineren Balkenlängen die besten Ergebnisse liefert. Bei relativ großen Längen würde sich das Laminat A empfehlen. Zusätzlich kann festgelegt werden, dass beim Eulerfall 4 die größten Knicklasten auftauchen. Beim Eulerfall 1 stellt sich die kleinste Knicklast ein. Der Unterschied der kritischen Knicklast zwischen den Eulerfällen ist allein mit dem Knickbeiwert zu erklären. Je niedriger der Knickbeiwert ist, desto kleiner wird die gesuchte Knicklast.

## Numerische Auswertung

In den nächsten Schritten soll mit Unterstützung der Numerik die im Abschnitt zuvor präsentierten analytischen Lösungen eines C-Profiles untersucht und verifiziert werden.

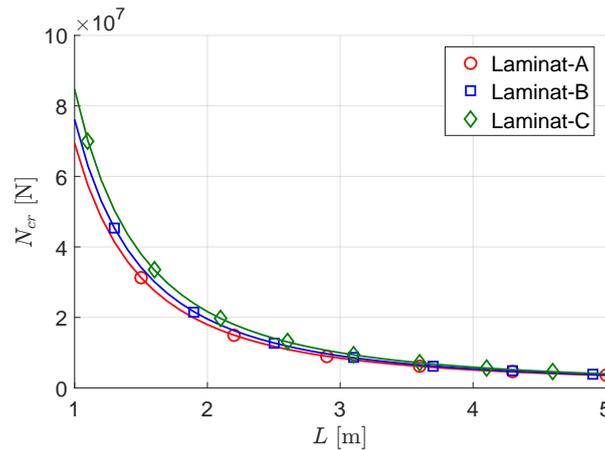


Abb. 5.48: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall III.

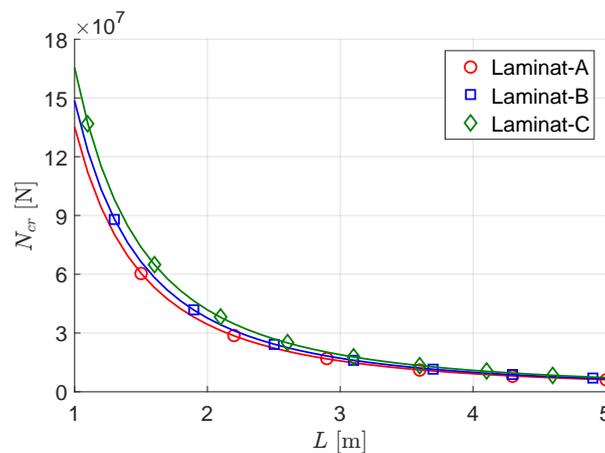


Abb. 5.49: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall IV.

Insgesamt werden zwei ausgewählte Randbedingungsfälle analysiert. Zunächst soll der Eulerfall 2 betrachtet werden. Dementsprechend werden an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  eine gelenkige Lagerung angebracht. Um die genannten Bedingungen in einem FE-Modell zu realisieren, müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Nullsetzen der Verschiebung entlang der  $x$ -Achse eines beliebigen Punkts des Modells
- Blockierung der Freiheitsgrade in  $z$ -Richtung für die äußeren Ränder der Gurte
- Sperrung der Translation in Richtung der  $y$ -Achse für die Enden des Steges
- Anbringen einer Gabellagerung an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$ .

Für die Einwirkung der zu untersuchenden Struktur werden mithilfe von RBE-Spinnen zwei entgegen wirkende Druckkräfte, die auf die äußeren Querschnittsfläche verteilt werden, eingesetzt. Die benötigten Masterknoten liegen auf der Schwerpunktschwerachse des C-Profiles.

Die Ergebnisse der kritischen Knicklast über die Balkenlänge  $L$  sind in der Abbildung 5.51 dargestellt. Dabei wird die Lösung der kritischen Knicklast aus der Analytik mit der Numerik verglichen. Als Basis für die geometrischen Maße und Lagenaufbauten soll die Laminat-Konfiguration C dienen. In Abbildung 5.51 lässt sich der Verlauf der geschlossen-analytischen kritischen Knicklast in zwei Lösungsbereiche aufteilen. Es kann festgestellt werden, dass bei Balkenlängen bis zu 5,8 m das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken auftritt. Darüber liegende Balkenlängen verursachen eine reine Biegeknickung um die  $z$ -Achse. In Bezug auf Abbildung 5.51 können für die numerisch ermittelte kritische Knicklast drei Versagensformen festgestellt werden.

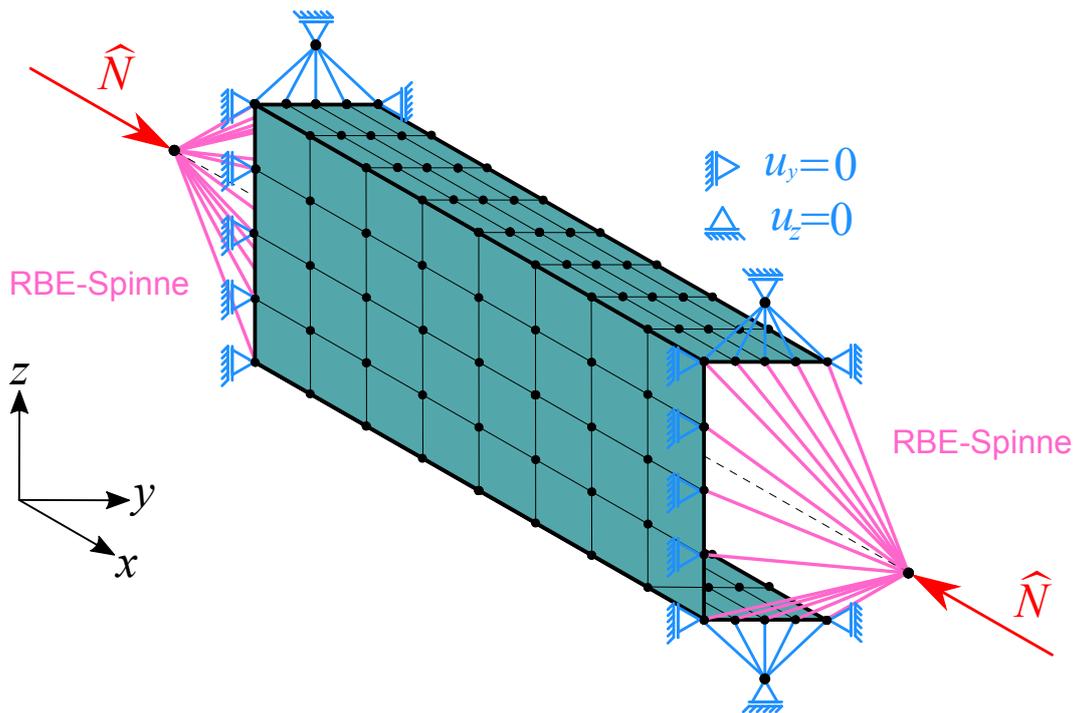


Abb. 5.50: Randbedingungen und Einwirkungen eines C-Profiles für den Eulerfall 2.

An dieser Stelle muss jedoch zwischen lokalen, globalen und gesamten Stabilitätsproblemen unterschieden werden. Die numerische Lösung der Knicklast liefert für Balkenlängen von bis zu 3,1 m nur lokale Versagensformen. Der Wert der kritischen Knicklast sinkt mit steigender Balkenlänge. Jedoch steigt die Knicklast bei bestimmten Geometrien kurzfristig an und fällt wieder ab. Dieser Zyklus kann im Längenbereich von 0,6 bis 3,1m mehrfach beobachtet werden. In der Fachliteratur wird dieser beschreibende Verlauf der kritischen Knicklast als sogenannte Girlandenkurve bezeichnet. Über der Girlandenkurve wird die Anzahl der hervorgerufenen Halbwellen ermittelt. Insgesamt können sich bis zu vier Halbwellen für die zu untersuchende Struktur einstellen. Die Halbwellenanzahl hängt jedoch von der Balkenlänge ab. Zwischen dem Längenbereich 3,1 m und 5,8 m werden sich kombinierte Versagensformen für die Struktur einstellen. Hierbei werden Kopplungen zwischen lokalen und globalen Stabilitätsproblemen auftauchen. Für das globale Stabilitätsproblem stellt sich das Biegedrillknicken in der  $xz$ -Ebene ein. Ab Balkenlängen von 5,8 m wird nur noch das reine globale Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene hervorgerufen. Bei einem Vergleich der Ergebnisse, kann festgestellt werden, dass die geschlossen-analytische Formel für das globale Versagen auf Biegeknicken eine hervorragende Lösung liefert. Im Bereich,

in dem sich eine kombinierte Versagensform einstellt, können relativ gute Lösungen gefunden werden. Der Verlauf aus der Analytik ähnelt dem aus der Numerik. Jedoch kann ein Unterschied vom Wert der kritischen Knicklast festgelegt werden. Diese Abweichung tritt auf, weil die im Rahmen dieser Arbeit hergeleitete Lösung keine lokalen Versagenseinflüsse mitberücksichtigt. Dementsprechend kann die Lösung auch kein zutreffenden Ergebnisse für den Anfangsbereich generieren.

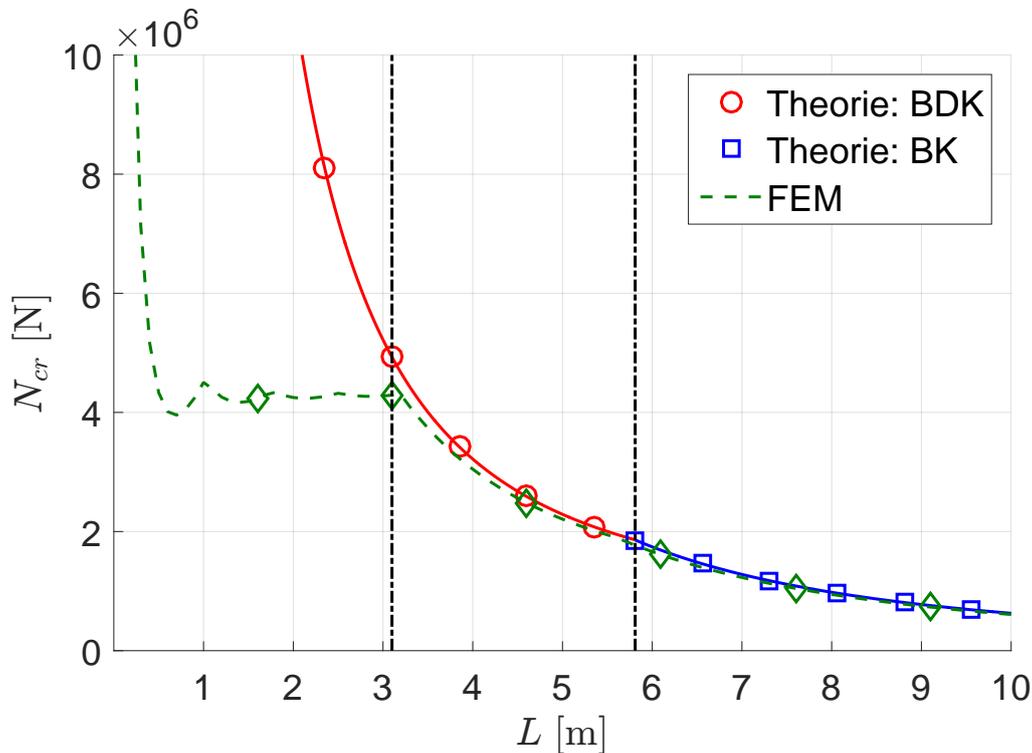


Abb. 5.51: Eulerfall 2: Kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

Betrachtet man die graphischen Eigenformen aus der FE-Berechnung, lässt sich für ein C-Profil, das beidseitig gelenkig gelagert ist, mit einer Balkenlänge von 1 m ein lokales Versagensbild feststellen (siehe Abbildung 5.52). Es stellen sich sowohl für den Steg als auch für die Gurte lokale Versagensformen ein. In Bezug auf den Steg kann eine Beule, die sich über die Gesamtfläche des Steges erstreckt, identifiziert werden. Der Steg weicht in positiver  $y$ -Richtung aus. Bei den Gurten stellt sich eine Beulform ein, die sich über die komplette Länge ausdehnt, am äußeren Rand des Gurtes wird jedoch die maximale Verformungsamplitude erreicht. Der obere Gurt weicht nach unten aus, wohingegen der untere Gurt in die entgegengesetzte Richtung ausgelenkt. Auch bei einer Balkenlängen von 2 m treten lokale Beulphänomene auf, jedoch stellen sich für sowohl die Gurte als auch für den Steg drei Halbwellen in der Längsrichtung ein. In Bezug auf die Eigenvektoren des Steges können unterschiedliche Werte festgestellt werden, wobei zwei davon identisch sind. Die mittlere Halbwelle des Steges besitzt im Vergleich zu den anderen beiden den niedrigsten Wert. Dabei weicht die mittlere Halbwelle nach innen aus. Die beiden anderen identischen Beulformen weichen in die entgegengesetzte Richtung aus.

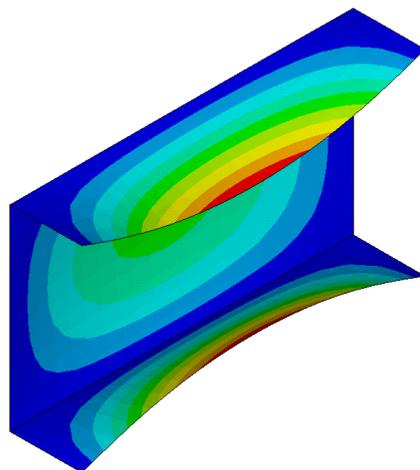
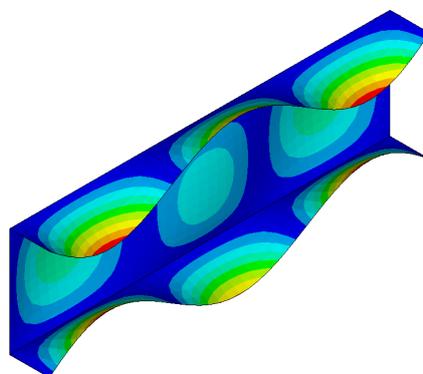
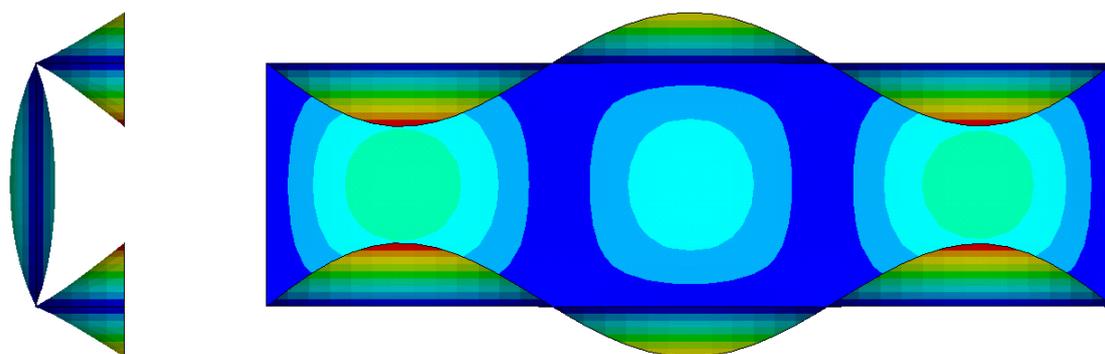
Abb. 5.52: Eigenformen eines C-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 1\text{m}$ .Abb. 5.53: Eigenformen eines C-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 2\text{m}$ .

Abb. 5.54: Lokales Beulen eines C-Träger beim Eulerfall 2.

Die maximale Beulamplitude tritt bei der Länge  $x = \frac{1}{4}L$  bzw.  $x = \frac{3}{4}L$  ein. In Bezug auf die Beulverformungen der Gurte können drei Halbwellen erkannt werden. Hierbei stellen sich die maximalen Auslenkungen an den äußeren Kanten ein. Auch im oberen Gurt treten die jeweiligen Beulamplitude der drei Halbwellen in den Längen  $x = \frac{1}{4}L$ ,  $x = \frac{1}{2}L$  und  $x = \frac{3}{4}L$  auf. Die beiden äußeren Halbwellen besitzen identische Eigenschaften und weichen nach innen aus. Für die mittlere Beule, die sich nach oben verformt, stellt sich eine kleinere Amplitude ein. Aus Abbildung 5.54 ist zu erkennen, dass für den unteren Gurt gleiche Verformungen auftreten wie beim oberen Gurt, wobei sie entgegengesetzt verlaufen.

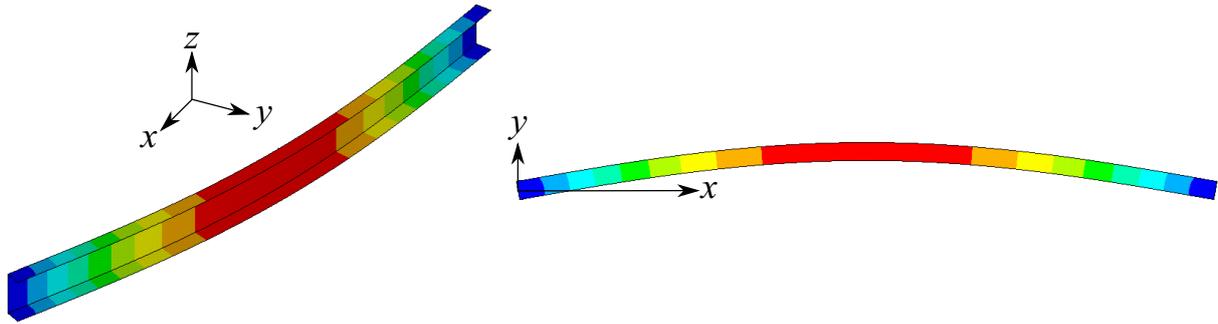


Abb. 5.55: Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene eines I-Träger beim Eulerfall 2.

Anschließend wird eine Beulanalyse für die Balkenlänge von 8 m durchgeführt. Für den betrachteten Composite-Träger lässt sich das globale Stabilitätsproblem Biegeknicken um die  $z$ -Achse festlegen. Die Struktur weicht seitlich in positiver Richtung der  $y$ -Achse aus. Die maximale Auslenkung der Struktur befindet sich in der Balkenmitte. An den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  können keine Deformationen identifiziert werden. Abbildung 5.55 zeigt für die Balkenstruktur in der  $xy$ -Ebene eine sinusförmige Knickform.

Im nächsten Schritt wird der Eulerfall 3 betrachtet. Dementsprechend wird am Rand  $x = 0$  eine feste Einspannung angenommen. Für die Umsetzung einer festen Einspannung werden für die betroffenen Kanten des FE-Modells die translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade gesperrt. Für eine einfache Realisierung wurde hierfür eine RBE-Spinne herangezogen. Am Ende  $x = L$  wird eine gelenkige Lagerung angebracht. Hierfür werden die Verschiebungen der Gurtkanten in  $z$ -Richtung gleich Null gesetzt. Des Weiteren wird die Translation entlang der Stegkante in Richtung der  $y$ -Achse blockiert. Zusätzlich wird am Rand  $x = L$  eine Gabellagerung angebracht, die verhindert, dass die Eckpunkte des Querschnitts sich in  $y$ -Richtung nicht verschieben können. Die Drucklast wird wieder über eine RBE-Spinne eingeleitet. In Abbildung 5.56 sind die geschilderten Bedingungen für die Freiheitsgrade und Einwirkungen des Eulerfalls 3 systematisch für ein C-Profil dargestellt.

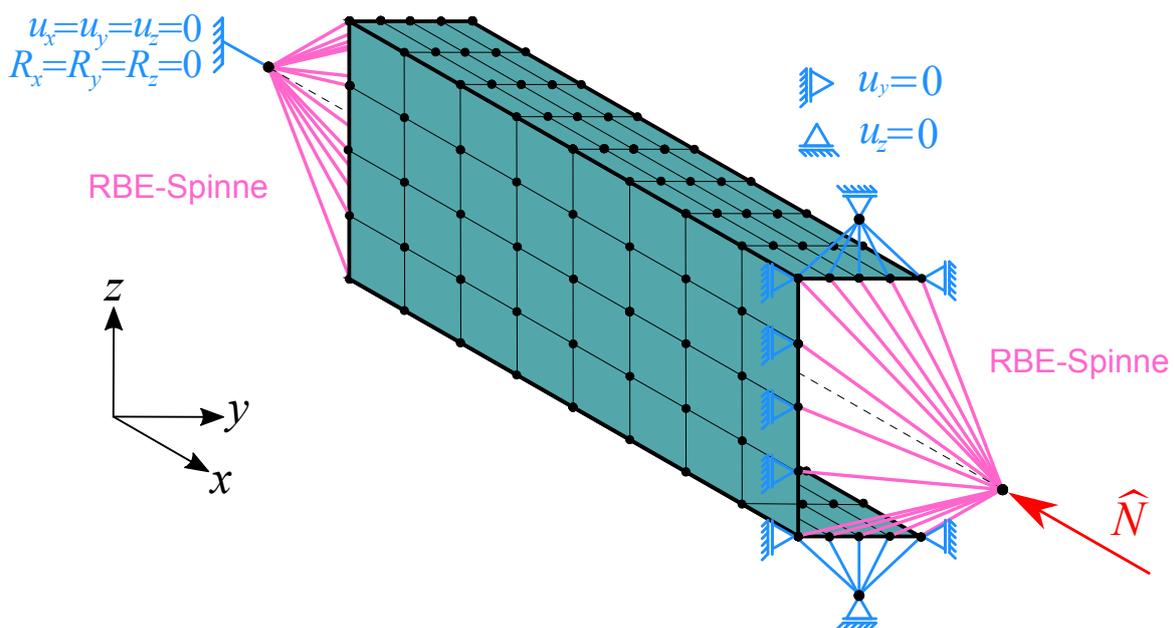


Abb. 5.56: Randbedingungen und Einwirkungen eines C-Profiles für den Eulerfall 3.

Die sowohl numerisch als auch analytisch ermittelte Lösung der kritischen Knicklast über die Balkenlänge  $L$  können aus der Abbildung 5.57 entnommen werden. Anhand der analytischen Auswertung konnte festgestellt werden, dass die geschlossen-analytische Lösung der Knicklast sich in zwei Lösungen unterteilt. Im Rahmen der berücksichtigten Bedingungen können sich Stabilitätsprobleme einstellen, die zum Biegedrillknicken und Biegeknicken gehören. Welche der beiden Versagensformen auftritt, hängt ausschließlich von der Balkenlänge  $L$  ab. In Bezug auf Abbildung 5.57 stellt sich für die Analytik ein Biegedrillknicken ein, wenn der Balken ein geringeres Maß als 8,3 m besitzt. Träger mit Längen die darüber liegen, neigen dazu, rein seitlich auszuknicken (Biegeknicken). Auch bei diesen Randbedingungsfall liefert die numerische Lösung der kritischen Knicklast drei Versagensarten. Die auftretenden Versagensformen können wie folgt unterteilt werden:

- lokales Versagen
- globales Versagen
- eine Kombination aus lokalem und globalem Versagen (Gesamtstabilität).

Für Balkenlängen von bis zu 4,5 m treten nur reine lokale Versagensformen auf. Für den Verlauf der Kurve lässt sich eine Reduzierung der kritischen Knicklast mit zunehmender Balkenlänge feststellen. Jedoch ist die Verminderung der Knicklast im Bereich  $0\text{ m} < x < 4,5\text{ m}$  nicht sehr signifikant. Es ist sogar davon auszugehen, dass über einen bestimmten Bereich ( $2\text{ m} \leq x \leq 4,5\text{ m}$ ) die Knicklast nahezu konstant verläuft. Bei Annäherung sich der Ordinate lässt sich ein Verlauf der Knicklast gegen unendlich feststellen.

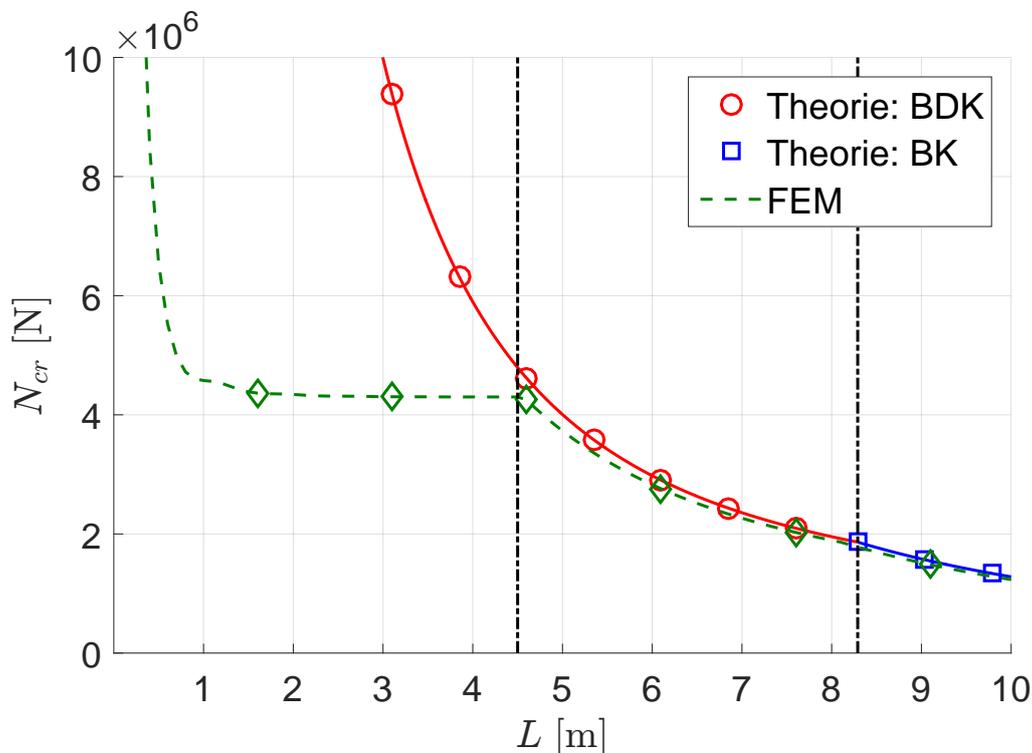


Abb. 5.57: Eulerfall 3: Kritische Last über die Länge eines C-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

Gemäß Abbildung 5.57 lassen sich im Bereich von  $4,5\text{ m} \leq x \leq 8,3\text{ m}$  kombinierte Versagensformen aus lokalen und globalen Stabilitätsproblemen der Struktur festlegen. Für das

lokale Stabilitätsproblem stellt sich sowohl im Gurt als auch im Steg eine Beulform ein. Für das globale Stabilitätsproblem wird hingegen ein Biegedrillknicken in der  $xz$ -Ebene hervorgerufen. Für Balkenlängen, die höher als 8,3 m sind, können auch aus der Numerik reine Biegeknickungen um die  $z$ -Achse festgestellt werden. Beim Vergleich der numerisch ermittelten Lösungen mit den aus der Analytik berechneten Ergebnissen können für den Bereich, in dem eine reine Biegeknickung auftritt, übereinstimmende Verläufe generiert werden. Im Bereich von 4,5 m bis 8,3 m können annähernde Verläufe der kritischen Knicklast ermittelt werden. Da in diesem Bereich kombinierte Versagensformen auftreten, kann die verwendete analytische Lösung keine genaueren Informationen ausgeben. Dementsprechend kann die Lösung aus der Analytik auch keine brauchbaren Ergebnisse für den Bereich, in dem reine lokale Versagensformen auftreten, generiert werden. In den nächs-

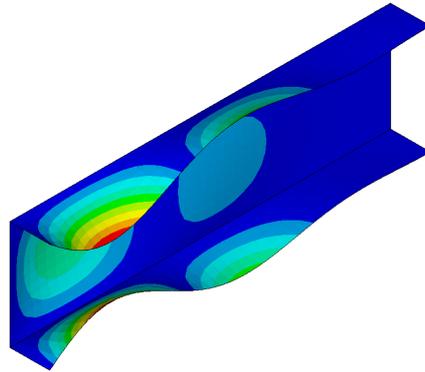


Abb. 5.58: Eigenformen eines C-Profiles für den Eulerfall 3,  $L = 2\text{m}$ .

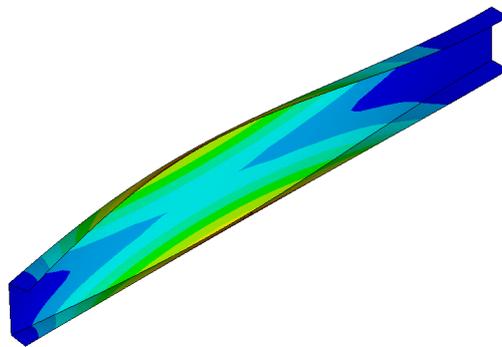


Abb. 5.59: Eigenformen eines C-Profiles für den Eulerfall 3,  $L = 6\text{m}$ .

ten Schritten werden von gewählten Balkenlängen die entstehenden Eigenformen aus der FE-Beulanalyse beschrieben. Zunächst sollen die Ergebnisse eines C-Profiles betrachtet werden, das eine Balkenlänge von 2m besitzt. Die am Rand  $x = 0$  eingespannte und am Ende  $x = L$  gelenkig gelagerte Balkenstruktur weist bei einer reinen Druckbelastung ein lokales Beulversagen auf (siehe Abbildung 5.58. Für den Steg des C-Profiles können insgesamt zwei Halbwellen in der Längsrichtung identifiziert werden. Die Position der jeweiligen maximalen Auslenkungen der Beulen befindet sich zum einen bei  $x = \frac{1}{2}L$  und zum anderen bei  $x = \frac{3}{4}L$ . Die Beulamplitude der beiden Halbwellen besitzen unterschiedliche Werte, wobei die Halbwellen bei  $x = \frac{1}{2}L$  eine erheblich niedrigere Auslenkung besitzt. Die Halbwellen an der Stelle  $x = \frac{3}{4}L$  weicht seitlich nach außen ab, wohingegen die zweite Beule nach innen zeigt. Auch für die Gurte stellen sich zwei Halbwellen ein, die sich an denselben

Stellen befinden wie beim Steg. Die maximale Verformungsamplitude beider Beulen liegt am äußeren Rand des Gurtes. Für den oberen Gurt gilt, dass die Halbwelle an der Position  $x = \frac{3}{4}L$  nach innen auslenkt. Die sich in der Mitte befindliche Halbwelle weicht nach oben aus. Bei einem Vergleich des absoluten Wertes der Beulamplitude weist die Halbwelle bei  $x = \frac{3}{4}L$  eine signifikantere Ausdehnung auf. Für den unteren Gurt stellen sich identische Ergebnisse ein, wobei die Auslenkungen in die entgegenlaufende Richtung verlaufen.

Die zweite Balkenlänge, die näher beschrieben wird, soll eine Länge von 6 m besitzen. Gemäß Abbildung 5.59 wird sich eine überlagerte Versagensform einstellen, auch Gesamtstabilität genannt, die sich aus lokalen Beulen und Biegedrillknicken der Gesamtstruktur zusammensetzt. Bei einer separaten Analyse des Steges bzw. des Gurtes, stellen sich Beulamplituden ein, die relativ geringer sind als die Verformungen, die durch das Biegedrillknicken hervorgerufen werden. Bei der Gesamtstabilität ist es schwierig, die lokalen Versagensformen zu beschreiben, weil sich hier nicht die typischen Halbwellen darstellen lassen. Die Verformungen aus dem globalen Stabilitätsanteil sorgen für eine seitliche Auslenkung der Struktur in Richtung der  $z$ -Achse.

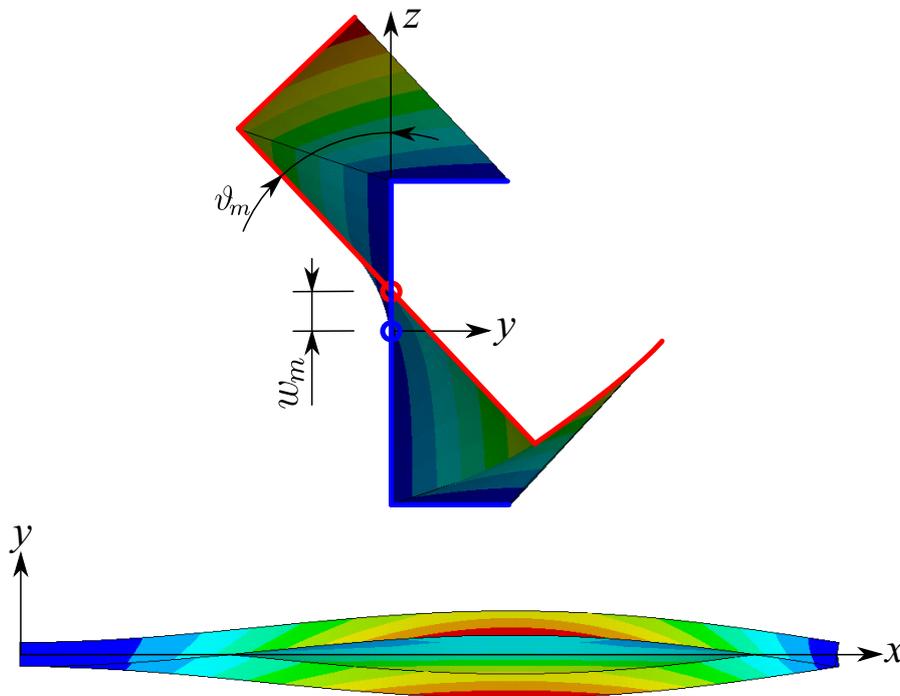


Abb. 5.60: Gesamtstabilität eines C-Profiles beim Eulerfall 3.

Zusätzlich entsteht eine Verdrehung des Querschnitts um die Längsachse. In Abbildung 5.60 ist die Versagensform in der  $yz$ -Ebene dargestellt. Der blau markierte Linienquerschnitt des C-Profiles zeigt die Deformation am Rand  $x = 0$ . Durch die Lagerungen werden an den äußeren Enden der Struktur keine translatorischen Verschiebungen zugelassen. Die rot gefärbten Linien zeigen den Querschnitt an, wo die maximale Verformung erreicht wird. Das  $w_m$  beschreibt den vertikalen Abstand zwischen der Schwerpunktschwerachse des verformten und des nicht verformten Querschnitts. Die dabei entstehende Verdrehung wird mit  $\vartheta_m$  gekennzeichnet. Die  $xy$ -Ebene der verformten Struktur zeigt, dass der Knickverlauf des dritten Eulerfalls auftritt. Es stellt sich dementsprechend eine Knicklänge von ungefähr  $0,7L$  ein.

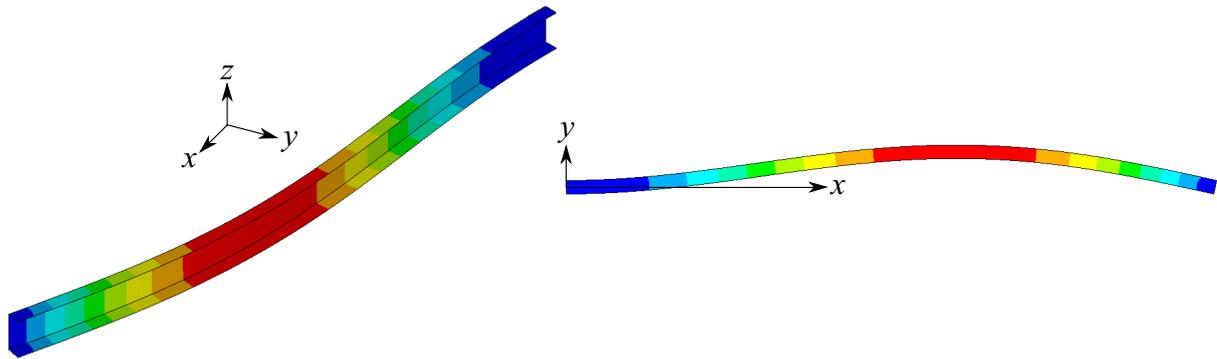


Abb. 5.61: Biegeknicken in der  $xy$ -Ebene eines C-Profils beim Eulerfall 3.

Abschließend soll eine Balkenlänge von 10 m analysiert werden. Bei Längen von  $x < 8,3 \text{ m}$  tritt lediglich das globale Stabilitätsproblem Biegeknicken auf. Hierbei weicht die Struktur seitlich in Richtung der  $y$ -Achse aus. Die größte Auslenkung befindet sich bei  $x \approx 0,7L$ . Am Rand  $x = 0$  können weder translatorische Verformungen noch rotatorische Verdrehungen ermittelt werden. Der Balken verläuft tangential zur  $x$ -Achse. Am Rand  $x = L$  sind die Translationen in der  $yz$ -Ebene durch die gelenkige Lagerung gesperrt. Dementsprechend stellt sich an diesem Rand eine Verdrehung ein. Die zu erwartende Knickform des Eulerfalls 3 kann in Abbildung 5.61 in der  $xy$ -Ebene beobachtet werden.

### 5.2.3 T-Profil

#### Analytische Auswertung

Im folgenden Abschnitt soll mithilfe der geschlossen-analytischen Formeln die Lösungen der kritischen Knicklast von drei T-Profilen untersucht und dargestellt werden. In Abbildung 5.62 werden die drei Geometrien des T-Profils, die für die analytische Auswertung verwendet werden, wiedergegeben. Das T-Profil wird in zwei Segmenten, Gurt und Steg, aufgeteilt. Die Maßeinheit der oben angeführten Abmessungen sind in Millimeter ange-

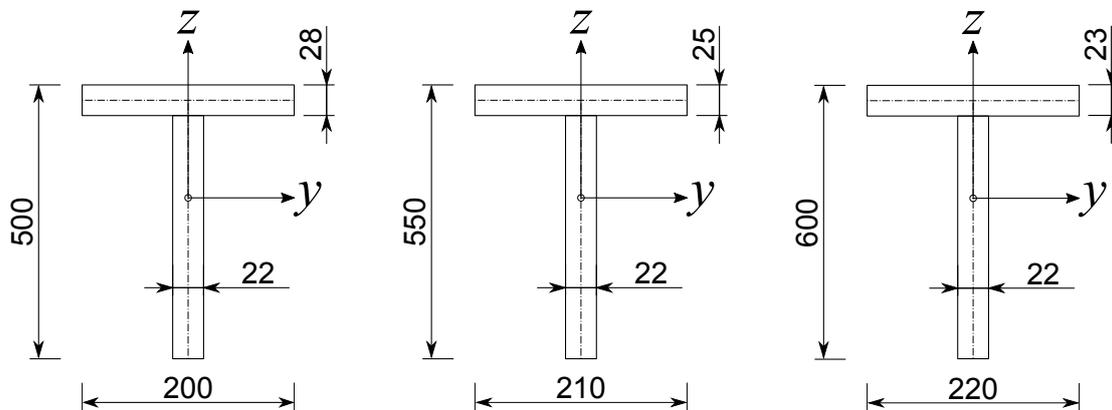


Abb. 5.62: Abmessungen der untersuchten T-Profile.

geben. Neben dem I-Profil besitzt auch das T-Profil einen symmetrischen Querschnitt zur  $z$ -Achse. Der Flächenschwerpunkt eines T-Profils liegt nicht auf dem Schwerpunkt des Steges, wie z.B. beim I-Profil. Die Position des Schubmittelpunkts befindet sich im

Kreuzungspunkt der Profilmittellinien des T-Querschnitts (siehe Abbildung 5.63). Bei einem T-Profil liegt der SMP auf der  $z$ -Achse, dementsprechend ist der Abstand  $y_{sc}$  gleich Null. Für die Distanz zwischen SMP und FSP verbleibt nur noch der Abstand  $z_{sc}$ . Die

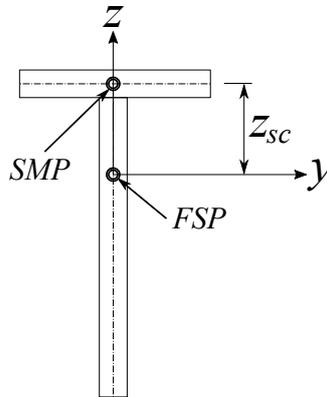


Abb. 5.63: Flächen- und Schubmittelpunkt eines T-Profils.

benötigten Lagenaufbauten für Gurt bzw. Steg können aus Kapitel 3 entnommen werden. Zur Ermittlung der geschlossen-analytischen kritischen Knicklast müssen die jeweiligen effektiven Steifigkeiten eines T-Profils herangezogen werden. Das Profil wird in zwei Segmente zerlegt. Für die beiden Segmente werden die folgenden Maße und Achsenbeschreibungen angewandt. Für die Parameter aus der Abbildung 5.64 sind für die Laminat-

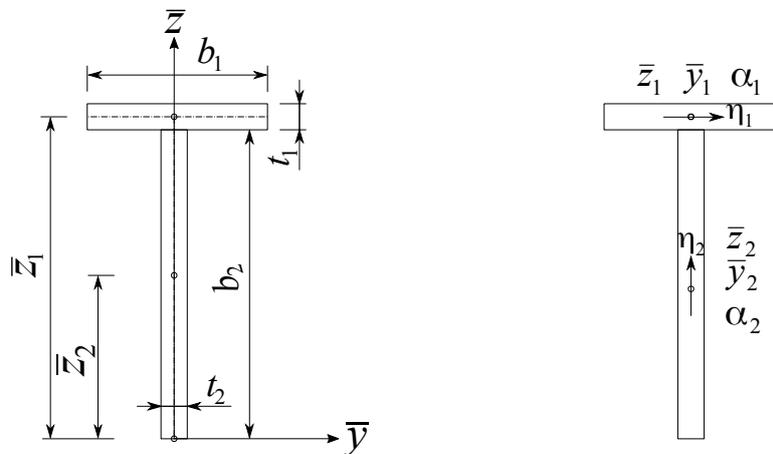


Abb. 5.64: Geometrische Parameter für ein T-Träger.

Konfigurationen A, B und C die Werte in Tabelle 5.3 gelistet. Die Erläuterung der eben präsentierten Parameter können im Abschnitt 4.2.2 nachgeschlagen werden. Die effektiven Steifigkeiten, die für eine Analyse der kritischen Knicklast benötigt werden, sind in Tabelle 5.4 angegeben.  $\hat{A}_{\kappa_{yy},\vartheta}$  und  $\hat{A}_{\kappa_{zz},\vartheta}$  werden für die Berechnung der kritischen Knicklast nicht verwendet, weil die angewandte Theorie nur orthotrope Steifigkeiten berücksichtigt. Der Schubmittelpunkt eines T-Profils liegt nicht auf dem Flächenschwerpunkt. Nach Auflösung der kubischen Gleichung (5.87) und Umformung nach der kritischen Knicklast ergeben sich drei Lösungen. Zwei davon beschreiben das Biegedrillknicken in der  $xy$ -Ebene. Die erste Lösung gibt ein Biegeknicken in der  $xz$ -Ebene an. Es können folgende Lösungen präsentiert werden:

Laminat-Konfiguration	Segment $k$	$b_k$ [m]	$t_k$ [m]	$\bar{z}_k$ [m]	$\bar{y}_k$ [m]	$\alpha_k$ [°]
A	1	0,200	0,028	0,486	0	0
	2	0,472	0,022	0,236	0	90
B	1	0,210	0,025	0,5375	0	0
	2	0,525	0,022	0,2625	0	90
C	1	0,220	0,023	0,5885	0	0
	2	0,577	0,022	0,2885	0	90

Tabelle 5.3: Parameter für ein T-Träger mit der Laminat-Konfiguration B.

Laminat-Konfiguration	$\widehat{EA}$ [N]	$\widehat{EI}_{yy}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_{zz}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{GI}_t$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{yy},\vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{A}_{\kappa_{zz},\vartheta}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_\omega$ [Nm <sup>4</sup> ]
A	884110000	20275000	1735500	54869	-31	148	0
B	875230000	25885000	1729200	57391	-22	164	0
C	884670000	32380000	1772700	60878	-36	181	0

Tabelle 5.4: Effektive Steifigkeiten eines T-Profiles mit den Laminat-Konfigurationen A, B und C.

1. Biegeknicken in der  $xz$ -Ebene:

$$N_{cr1} = N_{cry}^B, \quad (5.94)$$

2. Biegedrillknicken in der  $xy$ -Ebene:

$$N_{cr2} = \frac{i_\omega}{2(i_\omega^2 - z_{sc}^2)} \left[ i_\omega (N_{crz}^B + N_{cr\psi}^B) + \sqrt{i_\omega^2 (N_{crz}^B - N_{cr\psi}^B)^2 + 4N_{cry}^B N_{cr\psi}^B z_{sc}^2} \right], \quad (5.95)$$

3. Biegedrillknicken in der  $xy$ -Ebene:

$$N_{cr3} = \frac{i_\omega}{2(i_\omega^2 - z_{sc}^2)} \left[ i_\omega (N_{crz}^B + N_{cr\psi}^B) - \sqrt{i_\omega^2 (N_{crz}^B - N_{cr\psi}^B)^2 + 4N_{cry}^B N_{cr\psi}^B z_{sc}^2} \right], \quad (5.96)$$

Für  $N_{crz}^B$ ,  $N_{crz}^B$ ,  $N_{cr\psi}^B$  können die Gleichungen (5.88), (5.89) und (5.90) verwendet werden. Die niedrigste Lösung der dargestellten Knicklasten wird als ausschlagend bezeichnet. Über einen Vergleich der kritischen Knicklast über die Balkenlänge  $L$  kann eine explizite

Aussage getroffen werden, hierbei wird die Laminat-Konfiguration B verwendet. Für die theoretischen Lösungen kann festgestellt werden, dass eine der drei Lösungen stets einen erheblich geringeren Wert für die kritische Knicklast liefert. Für alle vier Eulerfälle stellt sich das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken in der  $xy$ -Ebene ein.

Bemerkenswert ist, dass die Lösung mit immer niedriger werdenden Länge zunimmt, jedoch verglichen zu den anderen Verläufen geht die Lösung nicht gegen unendlich. Probehalber wird in die analytische Lösung für die Balkenlänge ein paradoxer Zahlenwert von 0 m eingesetzt. Hierbei liefert die Lösung einen unendlichen Wert. Anhand von Abbildungen 5.65-5.68 lässt sich kein Wechsel des Stabilitätsproblems über der Balkenlänge feststellen.

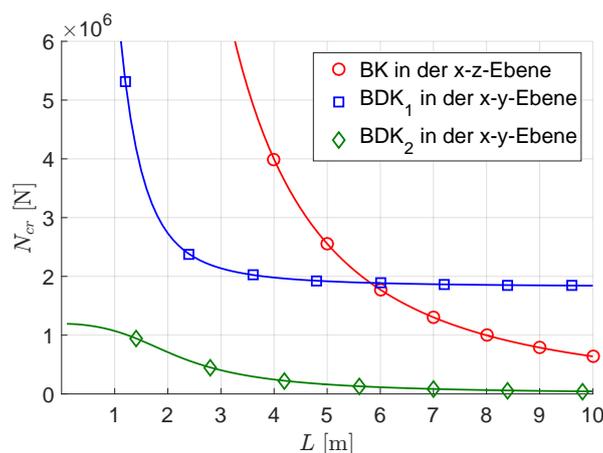


Abb. 5.65: Theoretische kritische Knicklast über die Länge eines T-Profiles mit der Laminat-Konfiguration B, Euler-Fall I.

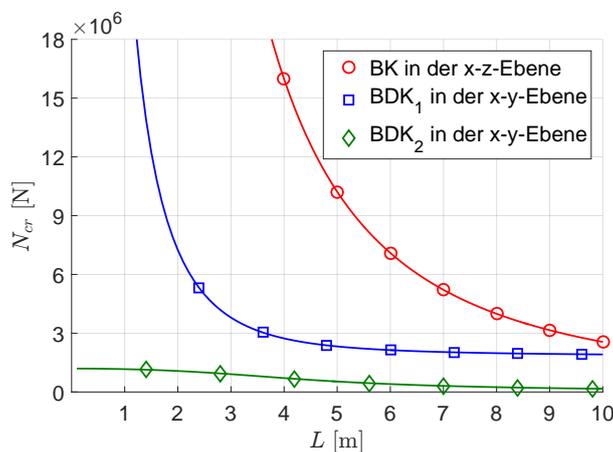


Abb. 5.66: Theoretische kritische Knicklast über die Länge eines T-Profiles mit der Laminat-Konfiguration B, Euler-Fall II.

An dieser Stelle sollen nun die Lösungen der kritischen Knicklast für die drei Laminat-Konfigurationen verglichen werden. Für die Untersuchung werden die vier Eulerfälle geprüft. In den Abbildungen 5.69-5.72 werden die kritischen Knicklasten für das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken über die Balkenlänge wiedergegeben. Auch hier ist zu erkennen, dass die Lösungen mit immer kleiner werdender Länge steigen, jedoch nicht gegen unendlich aufen. Eine Erklärung für dieses Phänomen ist der Wert Null der effektiven Wölb-

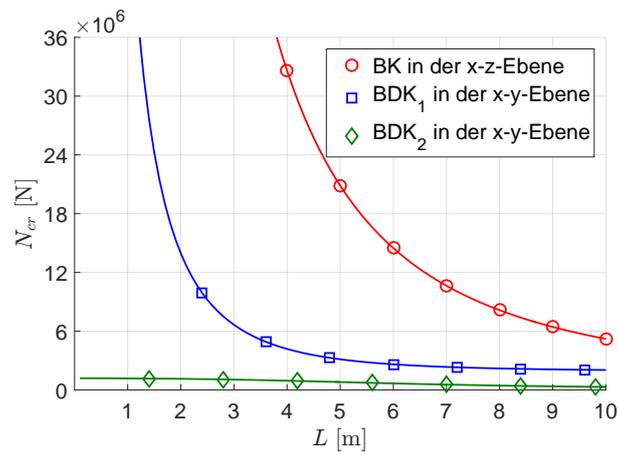


Abb. 5.67: Theoretische kritische Knicklast über die Länge eines T-Profiles mit der Laminat-Konfiguration B, Euler-Fall III.

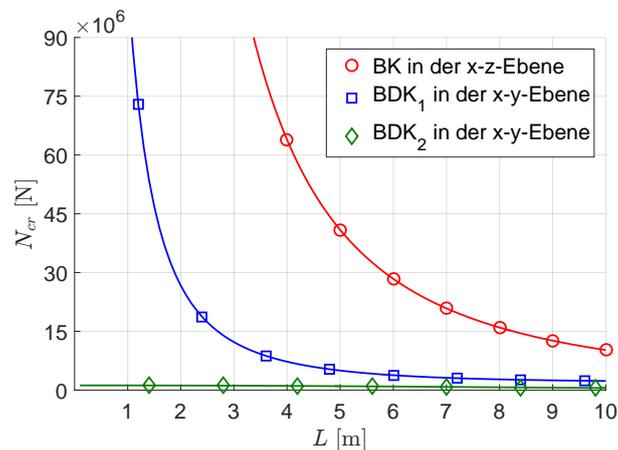


Abb. 5.68: Theoretische kritische Knicklast über die Länge eines T-Profiles mit der Laminat-Konfiguration B, Euler-Fall IV.

steifigkeit. Dementsprechend reduziert sich der Anteil durch Drillknicken der Knicklast erheblich. Das Drillknicken ist nur noch von der Torsionssteifigkeit abhängig. Der Anteil durch die Torsionssteifigkeit ist von der Balkenlänge unabhängig. Für einen Vergleich der Werte nahe an der Ordinate ( $x \approx 0,001$ ) lässt sich feststellen, dass der Wert der Knicklast für alle vier Eulerfälle identisch ist. Mit steigender Balkenlänge können für die vier Eulerfälle unterschiedliche Verläufe der kritischen Knicklast erkannt werden. Dabei besitzt die Laminat-Konfiguration A den höchsten Wert. Die Laminat-Konfiguration B ist am zweithöchsten. Dementsprechend ist die Laminat-Konfiguration C die schwächste Variante. Beim Eulerfall 1 kann bei einer Balkenlänge von 5 m nur noch ein sehr geringer Unterschied zwischen den untersuchten Konfigurationen festgestellt werden. Eine ähnliche Aussage tritt bei einer Länge von 8 m ein, wenn die Randbedingungen nach Eulerfall 2 angewendet werden. Für sowohl den Eulerfall 3 als auch 4 können bis zu Balkenlängen von 10 m keine signifikanten Differenzen zwischen den Konfigurationen festgelegt werden.

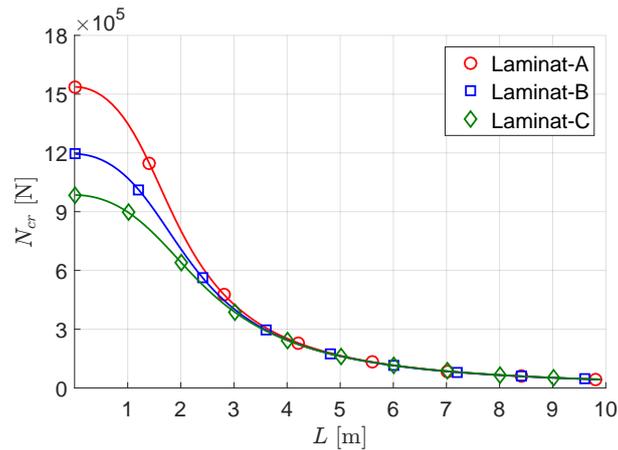


Abb. 5.69: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall I.

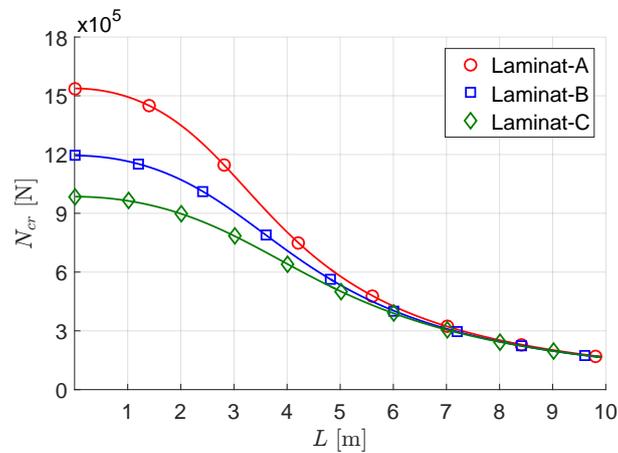


Abb. 5.70: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall II.

### Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt sollen die numerischen Lösungen der kritischen Knicklast anhand der FEM ausgewertet und mit den Ergebnissen aus der Analytik verglichen werden. Im

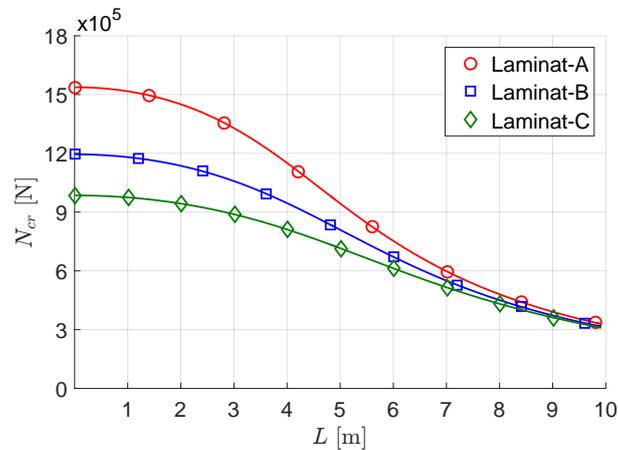


Abb. 5.71: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall III.

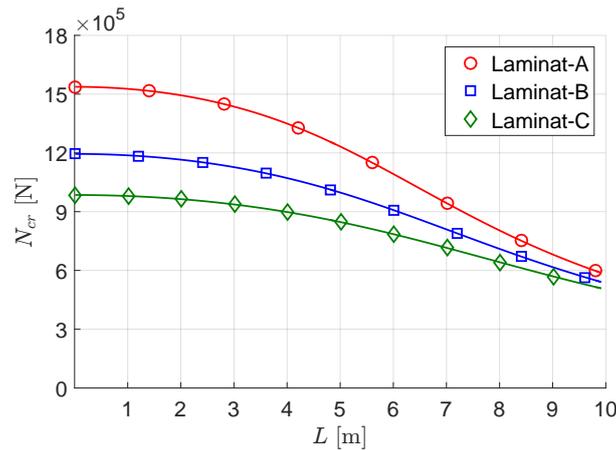


Abb. 5.72: Theoretische kritische Last über die Länge eines C-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Euler-Fall IV.

Rahmen des betrachteten T-Profiles wird ausschließlich der Elementarfall für die Randbedingungen näher untersucht. Für den Eulerfall 2 werden die äußeren Ränder  $x = 0$  und

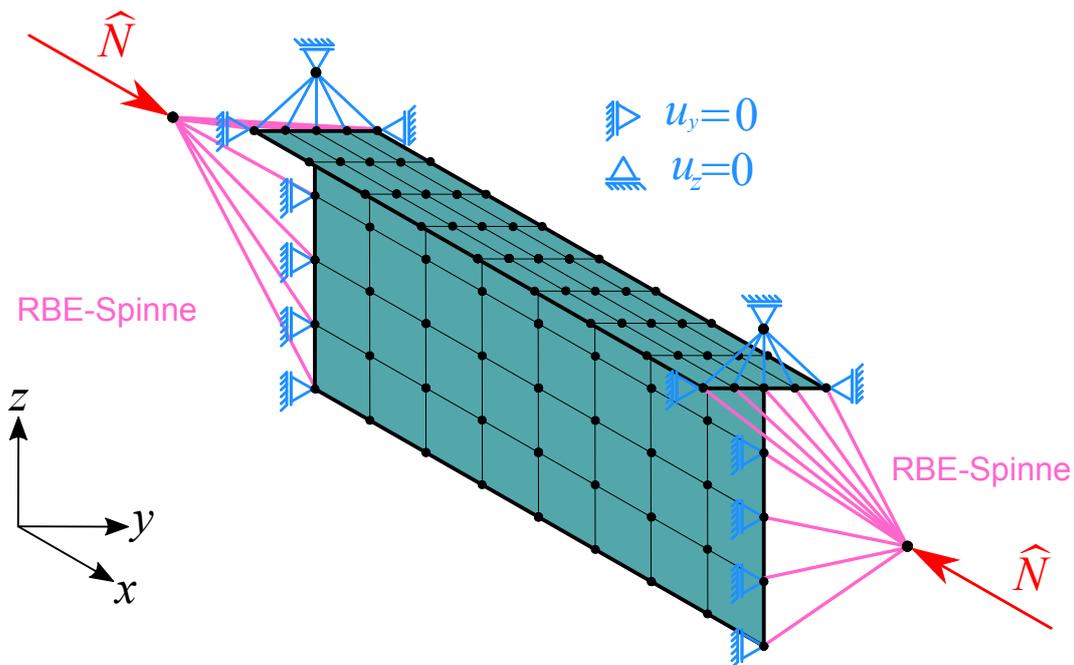


Abb. 5.73: Randbedingungen und Einwirkungen eines T-Profiles für den Eulerfall 2.

$x = L$  mit einer gelenkigen Lagerung versehen. Die Randbedingungen für das FE-Modell eines beidseitig gelenkig gelagerten T-Profiles sind identisch mit dem eines I-Querschnitts (siehe Abbildung 5.73). Die Einwirkungen auf das Modell werden wie zuvor über einen Masterknoten und einer RBE-Spinne realisiert. Hierbei liegen die notwendigen Masterknoten auf der Schwerpunktschwerachse des T-Profiles. Die beiden Druckkräfte verlaufen in entgegengesetzter Richtung zueinander.

Gemäß Abbildung 5.74 können die Verläufe der geschlossen-analytischen bzw. numerischen Lösung der kritischen Knicklasten über die Balkenlänge präsentiert werden. Hierbei werden die Abmessungen und Lagenaufbauten von der Laminat-Konfiguration B herangezogen. Für die numerische Lösung lässt sich feststellen, dass die kritische Knicklast

bei niedrigen Balkenlängen gegen unendlich verläuft. Mit zunehmender Länge hingegen sinkt die Knicklast. Für das T-Profil stellen sich im Vergleich zum C-Querschnitt nur zwei

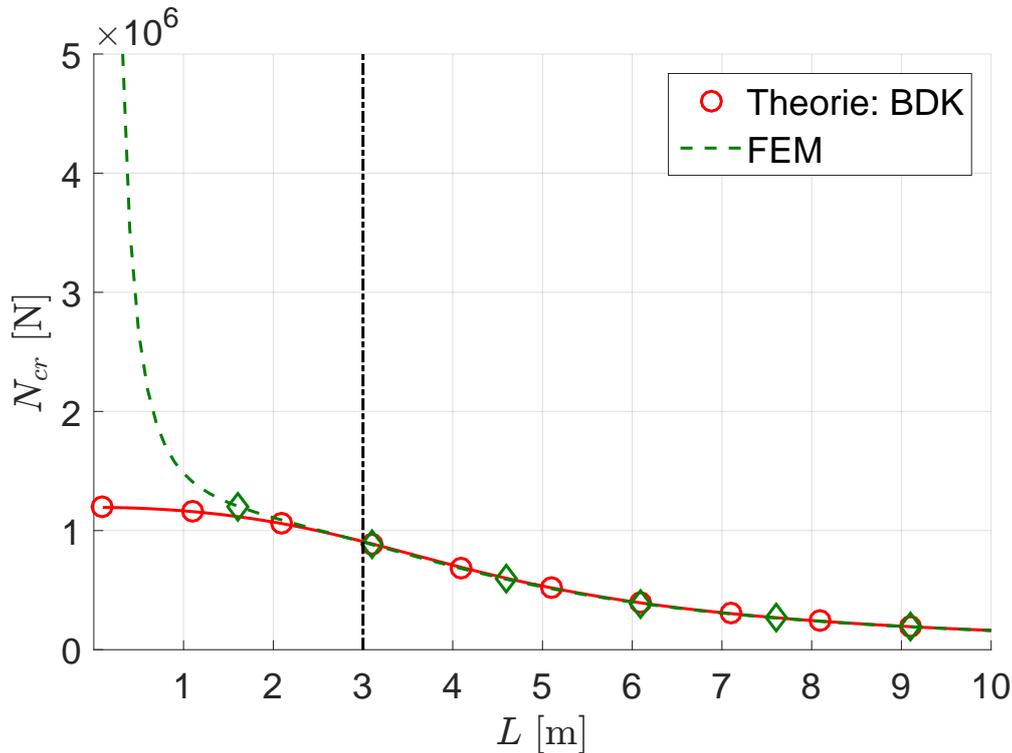


Abb. 5.74: Eulerfall 2: Kritische Last über die Länge eines T-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

Lösungsbereiche ein. Reine lokale Versagensformen können für den betrachteten Träger nicht ermittelt werden. Bis zur einer Balkenlänge von 3 m versagt das Modell stets auf Biegedrillknicken und gleichzeitigem lokalem Versagen der einzelnen Segmente. Ab einer Länge von  $x < 3$  m stellt sich das globale Stabilitätsproblem Biegedrillknicken in der  $xy$ -Ebene ein. Folglich weicht die Struktur seitlich in Richtung der  $y$ -Achse aus und erzeugt eine Verdrehung um die eigene Längssachse. Vergleicht man die Lösungen aus der Analytik mit der Numerik können für die Darstellung der reinen globalen Stabilitätsprobleme hervorragende Ergebnisse ermittelt werden. Im Bereich, in dem die Gesamtstabilität eine ausschlagende Rolle spielt, können keine befriedigenden Lösungen generiert werden. Dies liegt daran, dass die angewandte Theorie lokale Versagensformen nicht mit einschließt.

Im Folgenden werden für bestimmte Balkenlängen die entstehenden Eigenformen aus der FE-Analyse dargestellt und näher beschrieben. Zunächst soll eine Länge des Trägers von 2 m analysiert werden. Ist das T-Profil beidseitig gelenkig gelagert, stellt sich eine Gesamtstabilität ein, die sich aus lokalen Beulen und Biegedrillknicken der Gesamtstruktur zusammensetzt (siehe Abbildung 5.75). Lokale Versagensformen treten hierbei am Gurt des T-Profiles auf. Anhand von Abbildung 5.77 lassen sich zwei sinusförmige Halbwellen am Gurt erkennen. Sie liegen parallel zueinander in Längsrichtung und besitzen eine maximale Ausweichung am freien Rand. Einerseits weicht die rechte Hälfte des Gurtes nach oben aus und andererseits die linke Gurthälfte nach unten. Die Auslenkungen der beiden Beulen besitzen hierbei absolut gesehen einen identischen Wert. Das globale Versagen ist eine Kombination aus Biegeknicken um die  $z$ -Achse und einer Verdrehung um die Schwerpunktsachse. Die maximale Auslenkung tritt in der Balkenmitte am freien Rand des

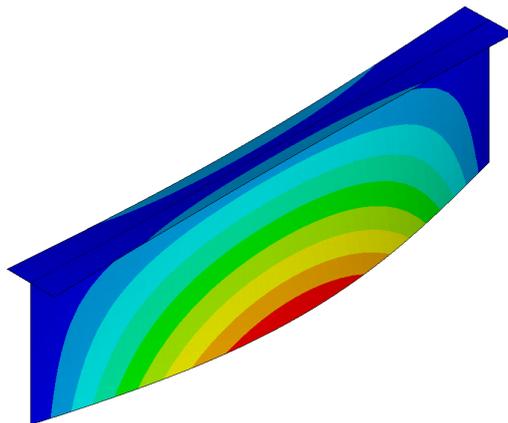


Abb. 5.75: Eigenformen eines T-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 2\text{m}$ .

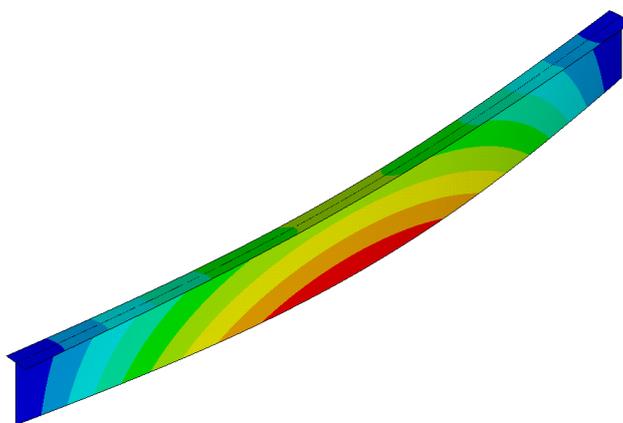


Abb. 5.76: Eigenformen eines T-Profiles für den Eulerfall 2,  $L = 6\text{m}$ .

Steges auf. Bei einem Vergleich der Beulamplituden mit der Verformung, die durch das Biegedrillknicken hervorgerufen wird, können signifikante Unterschiede ermittelt werden. Hierbei besitzen die lokalen Versagensformen den geringeren Verschiebungswert.

Abschließend soll eine Balkenlänge von 6 m näher untersucht werden. Mit Abbildung 5.74 soll sich bei dieser Länge sich ein reines globales Stabilitätsverhalten einstellen. Offenbar kann ein Biegedrillknicken der Struktur festgestellt werden. Der Träger weicht seitlich

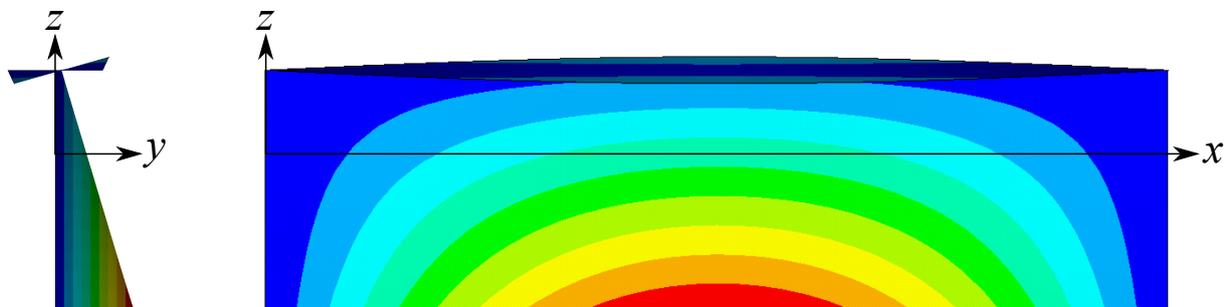


Abb. 5.77: Gesamtstabilität eines T-Profiles beim Eulerfall 2.

in Richtung der  $y$ -Achse aus. Zusätzlich wird eine Verdrehung des Querschnitts um die Längsachse erzeugt. Die blaue Profilmittellinie des T-Profiles zeigt die Verschiebungen am Rand  $x = 0$ . Da an diesem Rand die translatorischen Freiheitsgrade blockiert sind,

können keine Verschiebungen ermittelt werden. Für die rot markierte Profilmittellinie,

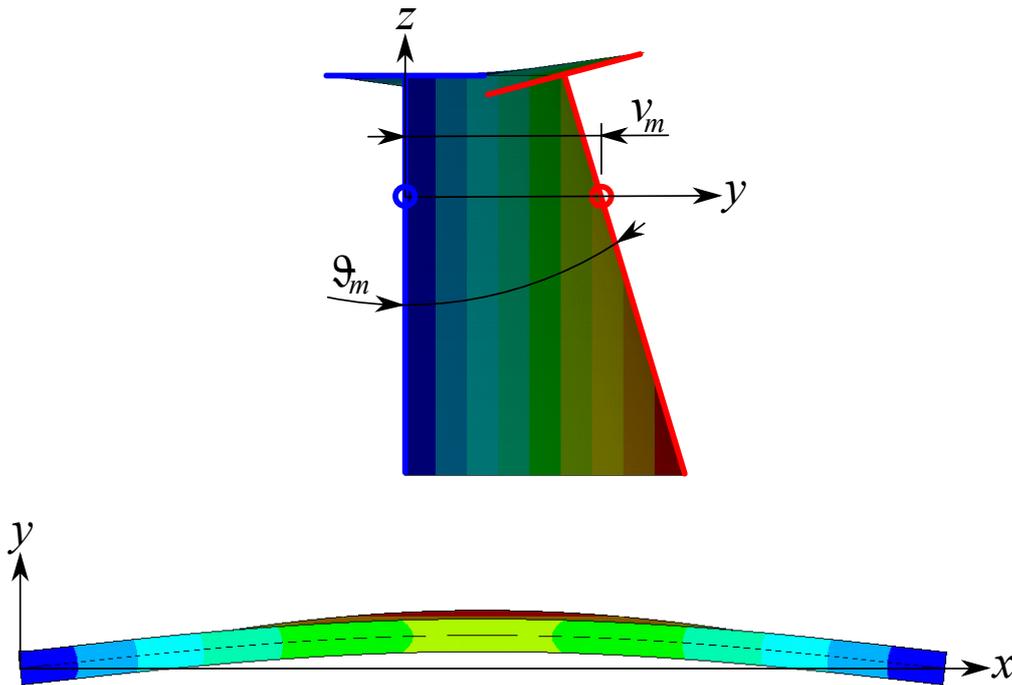


Abb. 5.78: Biegedrillknicken eines T-Profiles beim Eulerfall 2.

die den Balkenquerschnitt in der Mitte präsentiert, können eine Translation in Richtung der  $y$ -Achse festgestellt und eine Rotation um die Längsachse beobachtet werden. Das  $v_m$  gibt die vertikale Verschiebung zwischen den jeweiligen Schwerpunktsachsen an. Die Verdrehung um die verschobene Längsachse wird mit  $\vartheta_m$  gekennzeichnet. Bezüglich der  $xy$ -Ansicht der verformten Struktur kann ein erwartungsgemäßer Knickverlauf des zweiten Eulerfalls festgestellt werden. Dementsprechend befindet sich die maximale Auslenkung in der Balkenmitte. Für die Knicklänge kann folglich ein Wert von  $L$  notiert werden.

## 5.3 Stabilitätsprobleme infolge Lateralbelastung

### 5.3.1 Analytische Lösungen

In diesem Abschnitt sollen Composite-Träger untersucht werden, die unter einer lateralen Belastung stehen. Der zu untersuchende Balken muss zur  $z$ -Achse einen symmetrischen Querschnitt aufweisen. Die laterale Last darf nur in Rahmen der Symmetrieebene ( $xz$ -Ebene) aufgebracht werden. Besitzt der Träger ein viel größeres Flächenmoment um die eine Hauptachse als um die andere, stellt sich ein Versagen ein, das mit dem Biegedrillknicken verwandt ist. Neben den Biegeverformungen tritt zusätzlich eine Verdrehung der Struktur auf. Dieses Stabilitätsproblem wird als Kippen bezeichnet. Für die analytische Auswertung des Kippverhaltens eines Composite-Balkens wird die folgende Formel angewandt:

$$\hat{Q}_{cr} = F_1 \hat{N}_{crz}^B \left( F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1 \pm \sqrt{(F_2 f_{sc} + F_3 \beta_1)^2 + \frac{\hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\hat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.97)$$

$F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  sind konstante Parameter. Sie hängen von der angreifenden Belastung und von der Lagerung der zu analysierenden Struktur ab. An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass die Gleichung (5.97) normalerweise nur für Balkenstrukturen gilt, die aus orthotropen Laminaten bestehen. In dieser Arbeit werden für die Steifigkeiten  $\widehat{EA}$ ,  $\widehat{EI}_{yy}$ ,  $\widehat{EI}_{zz}$  und  $\widehat{GI}_t$  auch die nicht orthotropen Eigenschaften mitberücksichtigt. Die weiteren Steifigkeiten aus der Matrix  $\underline{P}$  werden nicht beachtet. Für die effektive Wölbsteifigkeit  $\widehat{EI}_\omega$  werden lediglich orthotrope Werte verwendet. Folglich werden nur I-Profile untersucht, die unterschiedliche Laminat-Konfigurationen besitzen. Des Weiteren wird die Balkenstruktur an beiden Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  mit einer gelenkigen Lagerung versehen.

Für die Berechnung der kritischen Kipplast können die effektive Steifigkeiten für die jeweilige Laminat-Konfiguration aus Tabelle 5.5 entnommen werden. Unabhängig von der

Laminat-Konfiguration	$\widehat{EA}$ [N]	$\widehat{EI}_{yy}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_{zz}$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{GI}_t$ [Nm <sup>2</sup> ]	$\widehat{EI}_\omega$ [Nm <sup>4</sup> ]
A	1379117023	63316207	3457349	63547	191889
B	1322438392	72471886	3443562	63971	236348
C	1302415533	83588180	3529218	66326	292494

Tabelle 5.5: Effektive Steifigkeiten eines I-Profils mit den Laminat-Konfigurationen A, B und C.

Laminat-Konfiguration liegt der Schubmittelpunkt eines I-Profils auf dem Flächenschwerpunkt. Die Abstände  $y_{sc}$  und  $z_{sc}$  sind dementsprechend gleich Null. Für die Ermittlung der kritischen Kipplast wird mithilfe der effektiven Steifigkeiten aus Tabelle 5.5 der Gyrationradius  $i_\omega$  wie folgt berechnet:

$$i_\omega = \sqrt{z_{sc}^2 + \frac{\widehat{EI}_{yy} + \widehat{EI}_{zz}}{\widehat{EA}}} \rightarrow \begin{aligned} i_{\omega_{LamA}} &= 0,2200 \text{ m} \\ i_{\omega_{LamB}} &= 0,2396 \text{ m} \\ i_{\omega_{LamC}} &= 0,2586 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Für den nächsten Rechenschritt werden die kritischen Lasten  $\widehat{N}_{crz}^B$  und  $\widehat{N}_{cr\psi}^B$  benötigt, die im Allgemeinen folgendermaßen bestimmt werden:

$$\widehat{N}_{crz}^B = k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_{zz}}{L^2} \quad \text{Biegeknicke in der } xy\text{-Ebene,} \quad (5.99)$$

$$\widehat{N}_{cr\psi}^B = \frac{1}{i_\omega^2} \left( k_{cr} \frac{\pi^2 \widehat{EI}_\omega}{L^2} + \widehat{GI}_t \right) \quad \text{Drillknicken um die } x\text{-Achse.} \quad (5.100)$$

Für den Kippbeiwert  $k_{cr}$  wird ein Wert von Eins eingesetzt, weil eine beidseitig gelenkig gelagerte Struktur angenommen wird. Für eine Balkenlänge von 5 m können die untenstehenden kritische Lasten für die unterschiedlichen Konfigurationen ermittelt werden. Da das betrachtete I-Profil einen doppelsymmetrischen Querschnitt besitzt, ergibt sich für den  $\beta_1$ -Parameter ein Wert von Null. Im Folgenden sollen die angebrachten Belastungsarten näher beschrieben und die daraus resultierende kritische Kipplast ermittelt werden.

	$\widehat{N}_{crz}$	$\widehat{N}_{cr\psi}$
	↓	↓
<b>Konfiguration A</b>	$1,365 \cdot 10^6 \text{ N}$	$2,877 \cdot 10^6 \text{ N}$
<b>Konfiguration B</b>	$1,359 \cdot 10^6 \text{ N}$	$2,739 \cdot 10^6 \text{ N}$
<b>Konfiguration C</b>	$1,393 \cdot 10^6 \text{ N}$	$2,718 \cdot 10^6 \text{ N}$

### Belastungsart: Moment

Zunächst sollen Composite-Träger untersucht werden, die an den beiden Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  mit einem reinen Biegemoment, das um die  $y$ -Achse verläuft, belastet werden (siehe Abbildung 5.79):

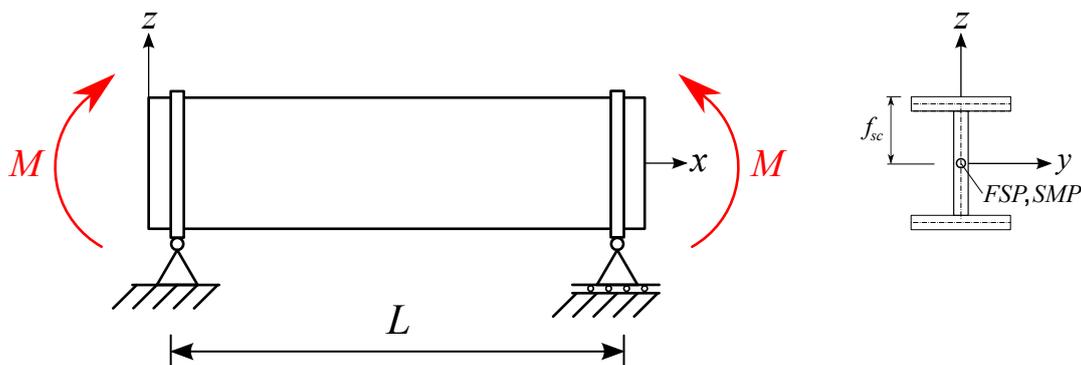


Abb. 5.79: Belastung durch Momente an den Rändern  $x = 0$  und  $x = L$ .

Für eine reine Momentenbelastung müssen für die Parameter  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  die folgenden Werte in die Gleichung (5.97) eingesetzt werden:

$$F_1 = 1, 0; \quad F_2 = 0, 0; \quad F_3 = 0, 5. \quad (5.101)$$

Dementsprechend kann die allgemeine Gleichung (5.97) für eine Momentenbelastung folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\widehat{M}_{cr} = \widehat{Q}_{cr} = \widehat{N}_{crz}^B + \sqrt{\frac{\widehat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\widehat{N}_{crz}^B}}. \quad (5.102)$$

Diese Formel gilt nur für doppelsymmetrische Querschnitte.

### Belastungsart: Streckenlast

Die zweite Belastungsart ist eine gleichförmige konstante Streckenlast über die Gesamtlänge der Balkenstruktur (siehe Abbildung 5.80). Die zu analysierende Streckenlast liegt in

der  $xz$ -Ebene und wirkt in die negative  $z$ -Richtung. Dementsprechend ist das Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck negativ.

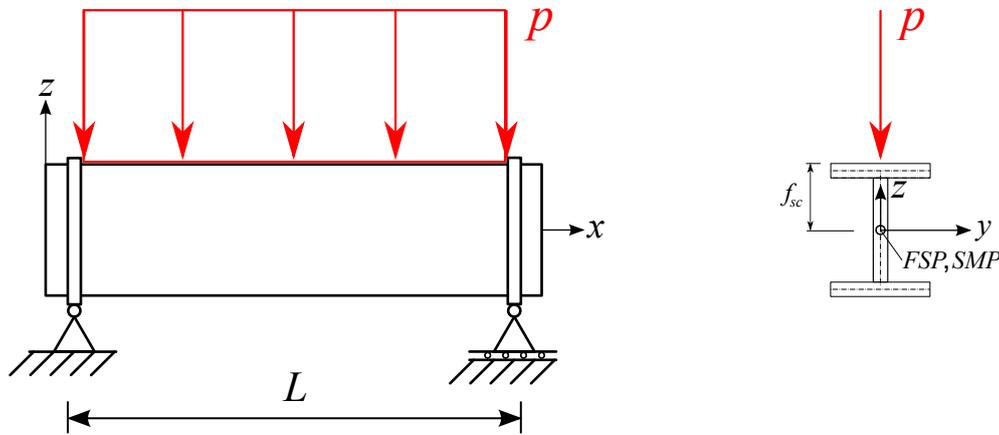


Abb. 5.80: Belastung durch eine Streckenlast.

Der Angriffspunkt der Streckenlast hat einen Einfluss auf die kritische Kipplast. Der Parameter  $f_{sc}$  gibt den Abstand zwischen Angriffspunkt und Schubmittelpunkt an. Wird die Belastung direkt am Schubmittelpunkt angebracht, kann der Wert für  $f_{sc}$  gleich Null gesetzt werden. Wird die Belastung stattdessen am oberen bzw. unteren Gurt angesetzt, müssen für die Laminaten-Konfigurationen die untenstehenden Werte für den jeweiligen  $f_{sc}$ -Parameter verwendet werden. Mithilfe der für die Strecklast bezogenen Parameter

Laminat-Konfiguration	$f_{sc}$ [m]	
	Gurt oben	Gurt unten
A	0,250	-0,250
B	0,275	-0,275
C	0,300	-0,300

Tabelle 5.6: Abstand  $f_{sc}$  für die Laminat-Konfigurationen A, B und C.

$$F_1 = 1,13; \quad F_2 = 0,45; \quad F_3 = 0,267, \quad (5.103)$$

kann die allgemeine Gleichung der kritischen Kipplast wie folgt dargestellt werden:

$$\hat{Q}_{cr} = 1,13 \hat{N}_{crz}^B \left( 0,45 f_{sc} \pm \sqrt{(0,45 f_{sc})^2 + \frac{\hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\hat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.104)$$

Um eine kritische Streckenlast zu erhalten, muss die Gleichung (5.104) mit  $\hat{p}_{cr} = \frac{8\hat{Q}_{cr}}{L^2}$  erweitert werden. Somit entsteht folgende analytische Gleichung für die kritische Kipplast,

die durch eine konstante Streckenlast hervorgerufen wird:

$$\hat{p}_{cr} = \frac{8,13\hat{N}_{crz}^B}{L^2} \left( 0,45f_{sc} \pm \sqrt{(0,45f_{sc})^2 + \frac{\hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\hat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.105)$$

Wird die Belastung am Schubmittelpunkt angebracht, verschwinden die Ausdrücke  $f_{sc}$  aus der Gleichung (5.105). Das Vorzeichen vor der Wurzel hängt von der Belastungsrichtung ab.

### Belastungsart: Einzellast

Abschließend wird eine Einzellast betrachtet, die in der Balkenmitte angreift (siehe Abbildung 5.81). Die Punktlast darf nicht an den äußeren Rändern des Gurts angebracht werden, sondern muss in der Symmetrieebene des Profils wirken.

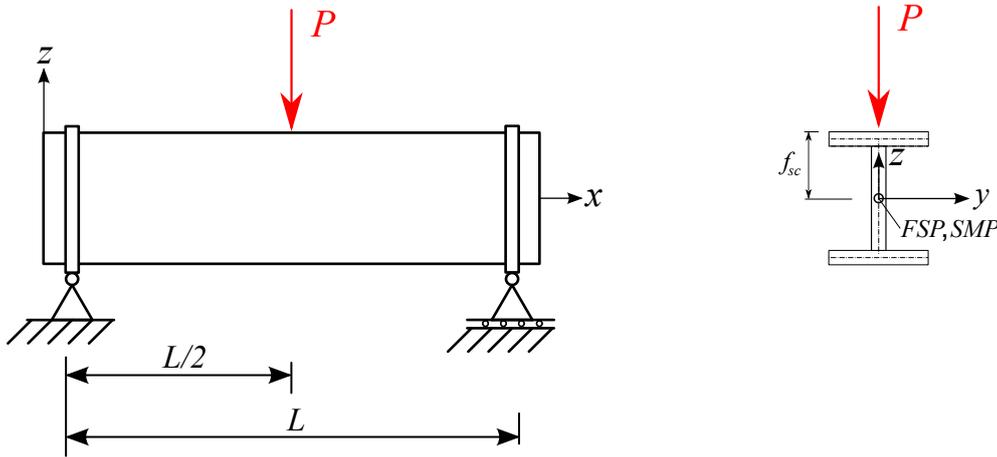


Abb. 5.81: Belastung durch Einzellast in Balkenmitte.

Die kritische Kipplast die durch eine Einzellast hervorgerufen wird, hängt auch von der Position des Angriffspunkts ab. Für die Einzellast gelten die identischen Werte für den  $f_{sc}$ -Parameter, die in Tabelle 5.6 aufgelistet sind.

Für die konstanten Parameter  $F_1, F_2, F_3$  müssen folgende Werte für eine in der Mitte des Balkens wirkende Einzellast eingesetzt werden:

$$F_1 = 1,35; \quad F_2 = 0,55; \quad F_3 = 0,212. \quad (5.106)$$

Setzt man die obigen Konstanten in die allgemeine Gleichung (5.97) ein, kann folgender Ausdruck ermittelt werden:

$$\hat{Q}_{cr} = 1,35\hat{N}_{crz}^B \left( 0,55f_{sc} \pm \sqrt{(0,55f_{sc})^2 + \frac{\hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\hat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.107)$$

Für eine kritische Einzellast wird die Gleichung (5.107) mit  $\hat{P}_{cr} = \frac{4\hat{Q}_{cr}}{L}$  weiterentwickelt und es stellt sich folgende Darstellung für die Kipplast ein;

$$\hat{P}_{cr} = \frac{4,35\hat{N}_{crz}^B}{L} \left( 0,55f_{sc} \pm \sqrt{(0,55f_{sc})^2 + \frac{\hat{N}_{cr\psi}^B i_\omega^2}{\hat{N}_{crz}^B}} \right). \quad (5.108)$$

Für eine Balkenlänge von 5 m sind die Lösungen der kritischen Kipplast abhängig von den eben beschriebenen Belastungsarten für die unterschiedlichen Laminat-Konfigurationen in der folgenden Tabelle aufgelistet: Bei einem Vergleich der Ergebnisse der unterschiedlichen

Laminat-Konfiguration	kritische Kipplast		
	Moment [Nm]	Streckenlast [ $\frac{N}{m}$ ]	Einzellast [N]
A	436040	218570	699650
B	462400	235070	754490
C	503280	258790	832440

Tabelle 5.7: Ergebnisse der kritischen Kipplast.

Laminat-Konfigurationen lässt sich feststellen, dass das Laminat C die größten kritischen Kipplasten hervorruft. Die Konfiguration B ist am zweithöchsten. Bei der Momentenbelastung kann eine Verbesserung zwischen Laminat A und B von 6 % festgestellt werden, wobei mit der Konfiguration C ein Verbesserungswert von 15 % erreicht wird. Wird eine Streckenlast aufgebracht ist die kritische Kipplast von Laminat C um das 1,18-Fache größer als von Laminat A. Zwischen Laminat A und B kann ein Faktor von 1,075 festgestellt werden. Für die Einzellast können ähnliche Unterschiede ermittelt werden.

Für eine bessere Beschreibung der analytischen Lösungen werden die kritischen Kipplasten über die Balkenlänge  $L$  präsentiert. Zunächst sollen die Kipplasten von den jeweiligen Belastungsarten für die unterschiedlichen Laminat-Konfigurationen miteinander verglichen werden.

Für sowohl das Moment als auch die Streckenlast und Einzellast können ähnliche Verläufe der kritischen Kipplast festgestellt werden. Die theoretische Kipplast verringert sich mit steigender Balkenlänge und verläuft gegen einen bestimmten Wert. Dementsprechend entstehen bei relativ kurzen Balken hohe Kipplasten. Die Laminat-Konfiguration A besitzt dabei stets die geringste kritische Kipplast. Die höchste Kipplast wird mit der Konfiguration C erreicht. Der Unterschied zwischen den Laminat-Konfigurationen verringert sich mit zunehmender Balkenlänge. Die Kipplast bei einer Momentenbelastung besitzt die Einheit Nm. Gleiches Phänomen kann bei der kritischen Streckenlast ermittelt werden. Hierbei sinkt die kritische Kipplast mit steigender Balkenlänge signifikanter als bei einer Momentenbelastung. Der Unterschied der Kipplast zwischen den Laminaten bleibt auch bei kurzen Balkenlängen gering. Die Maßeinheit der Kipplast infolge einer Streckenlast wird mit  $\frac{N}{m}$  angegeben.

Für die kritische Einzellast können ähnliche Eigenschaften wie bei den anderen Belastungstypen dokumentiert werden. Auch hier erbringt die Konfiguration C die größte kritische

Kipplast. Hierbei besitzt die Kipplast die Einheit Newton. Die kritische Kipplast infolge einer Strecken- bzw. Einzellast hängt zusätzlich davon ab, an welcher Stelle die Belastung am Träger angreift. Um den Einfluss des Lastangriffspunkt zu ermitteln, werden drei bestimmte Positionen für einen Angriffspunkt gewählt und miteinander verglichen. Die Belastung wird am obere und am unteren Gurt angebracht. Für die dritte Position wird der Schubmittelpunkt des zu untersuchenden Querschnitts gewählt.

In den Abbildungen 5.85 und ?? sind die unterschiedlichen Verläufe der kritischen Kipplast infolge einer Streckenbelastung für die beschriebenen Positionen dargestellt, wobei die Laminat-Konfiguration C als Basis dienen soll. Die geringste kritische Kipplast wird

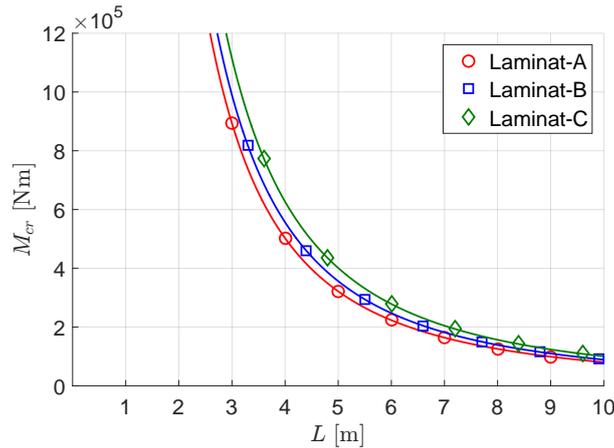


Abb. 5.82: Kritische Kipplast über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Momentenbelastung.

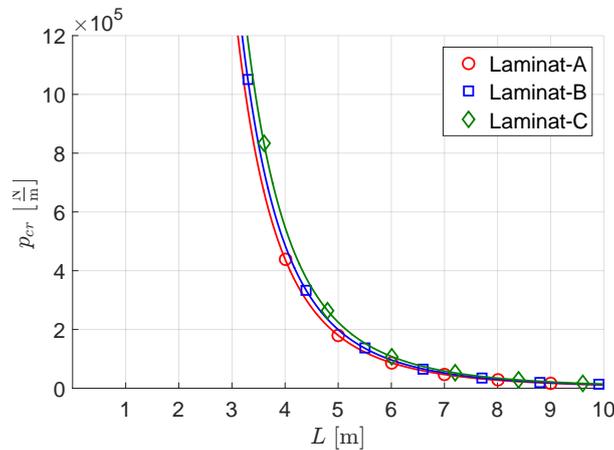


Abb. 5.83: Kritische Kipplast über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Streckenlast am oberen Gurt.

beim Angriffspunkt am oberen Gurt generiert. Am unteren Gurt kann hingegen die höchste Kipplast ermittelt werden. Wird die Belastung am Schubmittelpunkt angebracht, kann die zweitgrößte Kipplast festgestellt werden. Aufschlussreich ist, dass die Unterschiede zwischen den Kipplasten bei niedrigen Balkenlängen signifikanter sind. Für Balkenlängen ab 9 m können geringfügige Differenzen zwischen den Angriffspositionen festgestellt werden. Für eine Balkenlänge von 5 m entsteht eine kritische Kipplast von  $127980 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , die am oberen Gurt belastet wird. Wird die Streckenlast am Schubmittelpunkt angebracht,

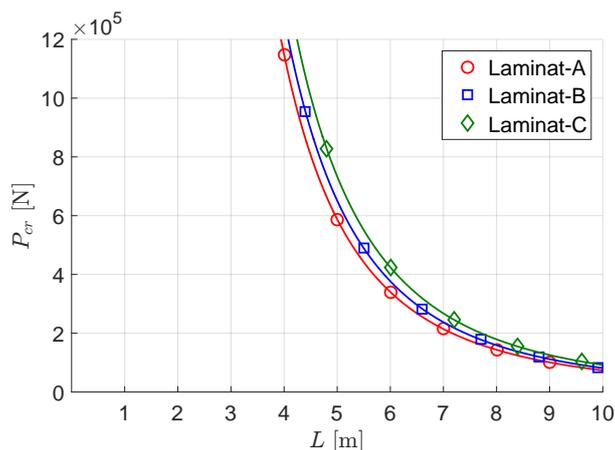


Abb. 5.84: Kritische Kipplast über die Länge eines I-Profiles für die Laminat-Konfigurationen A, B und C, Einzellast am oberen Gurt.

kann die Kipplast um einen Faktor von 1,4 erhöht werden. Am unteren Gurt kann ein Vielfaches von 2 festgestellt werden. Auch infolge einer Einzellast, die in der Balken-

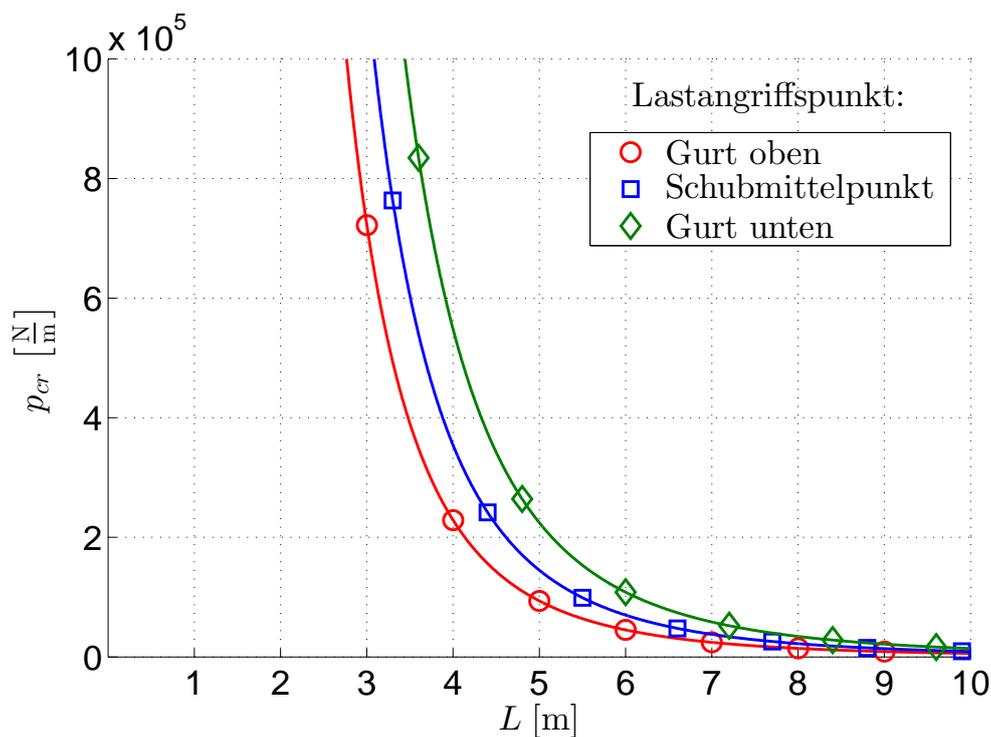


Abb. 5.85: Kritische Streckenlast für unterschiedliche Angriffspositionen.

mitte einwirkt, können Einflüsse bei der Position des Angriffspunkts festgestellt werden. Wie bei der Streckenlast können ähnliche Aussagen für die kritische Kipplast getroffen werden. Am oberen Gurt kann die geringste Kipplast identifiziert werden. Im Schubmittelpunkt ist die zweitgrößte und am unteren Gurt die höchste Kipplast festzustellen. Mit der Laminat-Konfiguration A und einer Balkenlänge von 5 m kann am oberen Gurt eine kritische Kipplast von 2535800N festgestellt werden. Am Schubmittelpunkt bzw. am unteren Gurt vergrößert sich die kritische Kipplast um 1,5 bzw. 2,2.

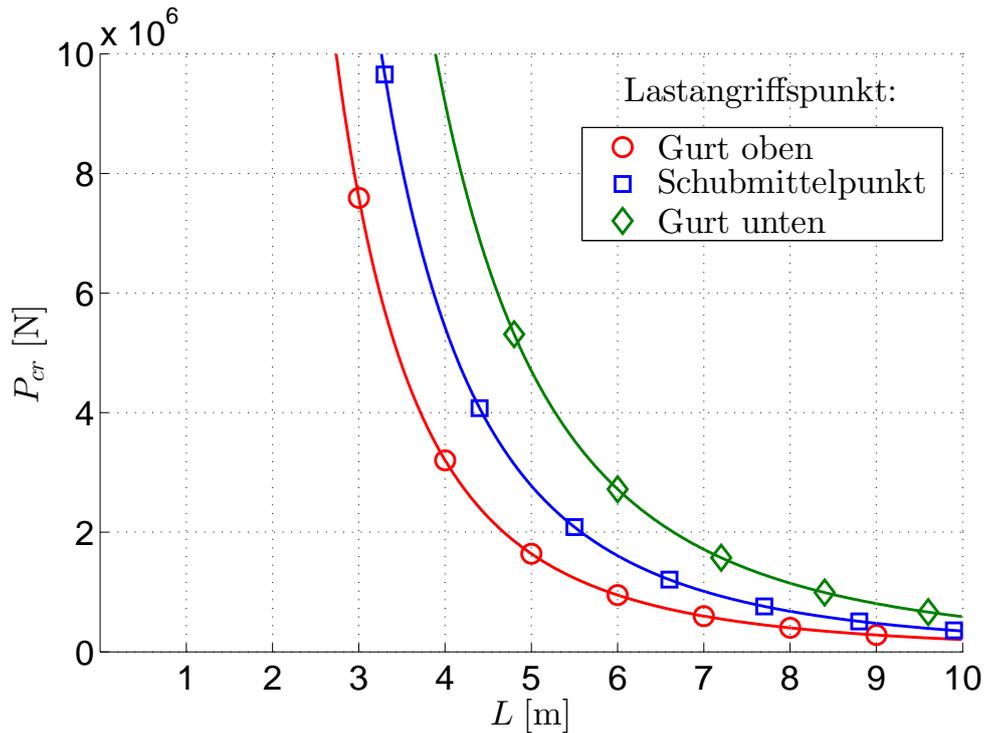


Abb. 5.86: Kritische Einzellast für unterschiedliche Angriffspositionen.

### 5.3.2 Numerische Lösungen

Im vorliegenden Abschnitt wird anhand der Numerik versucht, die eben dargestellten geschlossen-analytischen Lösungen zu verifizieren. Für den I-Träger wird der Randbedingungsfall beidseitig gelenkig gelagert betrachtet, wobei jeweils drei Belastungstypen angebracht werden. Die genauen Bedingungen für eine gelenkige Lagerung können aus den vorherigen Abschnitt und aus Abbildung 5.29 entnommen werden. Im weiteren Verlauf werden die numerischen Lösungen mit verschiedenen Belastungsarten näher beschrieben und mit der Lösung aus der Analytik verglichen.

#### Belastungsart: Moment

Zunächst wird die beidseitige Momentenbelastung betrachtet. In der FEM werden die beiden Momenten über eine RBE-Spinne realisiert. Folglich werden die Querschnitte gleichförmig belastet.

Bezüglich der Abbildung 5.87 werden sowohl die geschlossen-analytischen als auch die numerischen Lösungen der kritischen Kipplast infolge eines Moments dargestellt und verglichen. Hierbei wird die Kipplast über die Balkenlänge präsentiert. Die Abmessungen und Lagenaufbauten beziehen sich in diesem Fall auf die Laminat-Konfiguration C. Auch bei einer lateralen Belastung kann allgemein festgelegt werden, dass die kritische Kipplast mit zunehmender Balkenlänge sinkt.

Die numerische Lösung der kritischen Kipplast besitzt bei einer reinen Momentenbelastung zwei Versagensarten, die bei bestimmten Längenbereichen auftreten. Bis zu einer Länge von 1,75 m können hauptsächlich lokale Versagensformen beobachtet werden. Im Bereich  $1,75 \text{ m} < x \leq 10 \text{ m}$  können Kombinationen aus lokalen und globalen Versa-

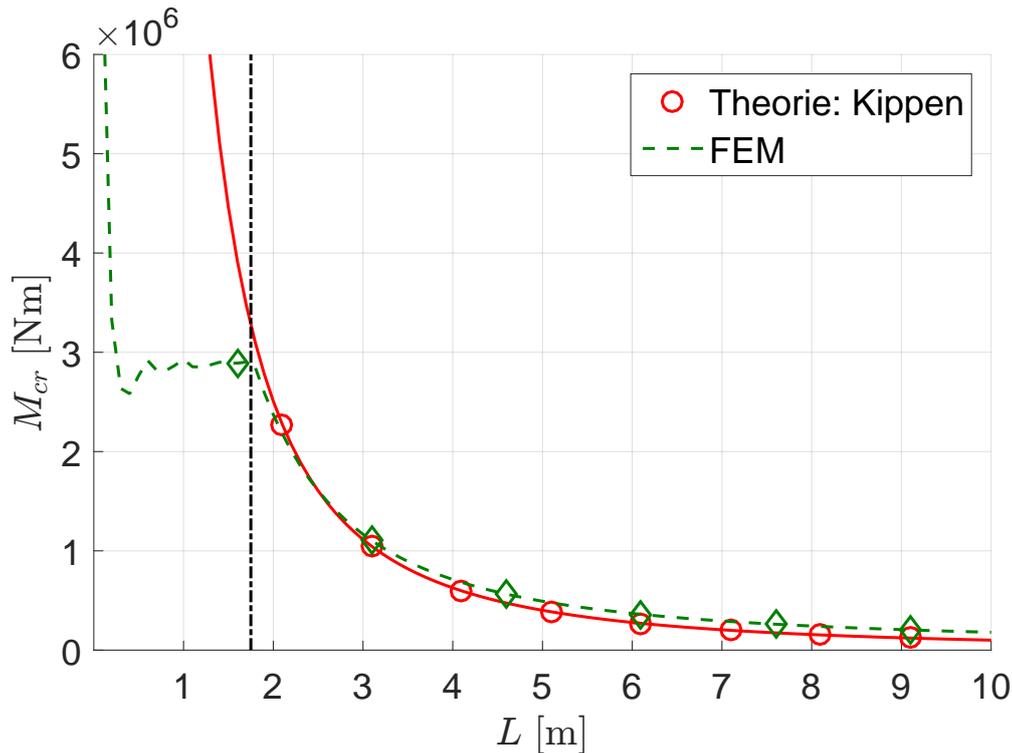


Abb. 5.87: Kritisches Moment über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration C.

gensmoden festgestellt werden. Dementsprechend entsteht ein Gesamtstabilitätsproblem des Modells. Hierbei stellt sich für das globale Stabilitätsversagen das Kippen bzw. Biegedrillknicken ein. Die Struktur weicht seitlich in Richtung der  $y$ -Achse aus und erzeugt gleichzeitig eine Verdrehung um die Längssachse. Für die lokalen Versagensformen treten in den Gurten Halbwellen auf.

Für die lokalen Eigenformen aus der FE-Berechnung bei einer Balkenlänge von 1 m können unterschiedliche Beulformen identifiziert werden (siehe Abbildung 5.88). Beim Erreichen der kritischen Kipplast können am oberen Gurt keine Verformungen registriert werden. Am unteren Gurt hingegen können in Längsrichtung zwei Halbwellen erkannt werden. Die maximale Amplitude tritt am äußeren Rand des Gurtes auf. Die Auslenkung der Halbwellen führt zu unterschiedlichen Werten. Die größten Verformungen treten bei den Koordinatenwerten  $x = 0,25L$  und  $x = 0,75L$  am unteren Gurt auf. Am Steg können auch zwei Beulformen entdeckt werden. Die maximale Auslenkung befindet sich nicht im Schwerpunkt des Steges, sondern bei einem Viertel der Steghöhe in negativer  $z$ -Richtung. Die Amplituden der beiden Halbwellen sind identisch.

Bei einer Balkenlänge von 5 m stellt sich ein Gesamtstabilitätsproblem ein (siehe Abbildung 5.89). Die Balkenstruktur weicht zum einen seitlich in positiver  $y$ -Richtung aus. Zusätzlich wird eine Verdrehung des Querschnitts um die Längsachse hervorgerufen. Die maximale Auslenkung befindet sich in der Balkenmitte. An den äußeren Rändern  $x = 0$  und  $x = L$  können keine Verformungen identifiziert werden. Des Weiteren lassen sich am oberen Gurt Halbwellen feststellen, die eine relativ niedrige Beulamplitude besitzen. Die maximale Verschiebung der Halbwellen befinden sich in der Balkenmitte an den beiden äußeren Längsrändern des oberen Gurtes, wobei die rechte Seite nach oben ausweicht. Die linke Seite des Gurtes verformt sich in die entgegengesetzte Richtung.

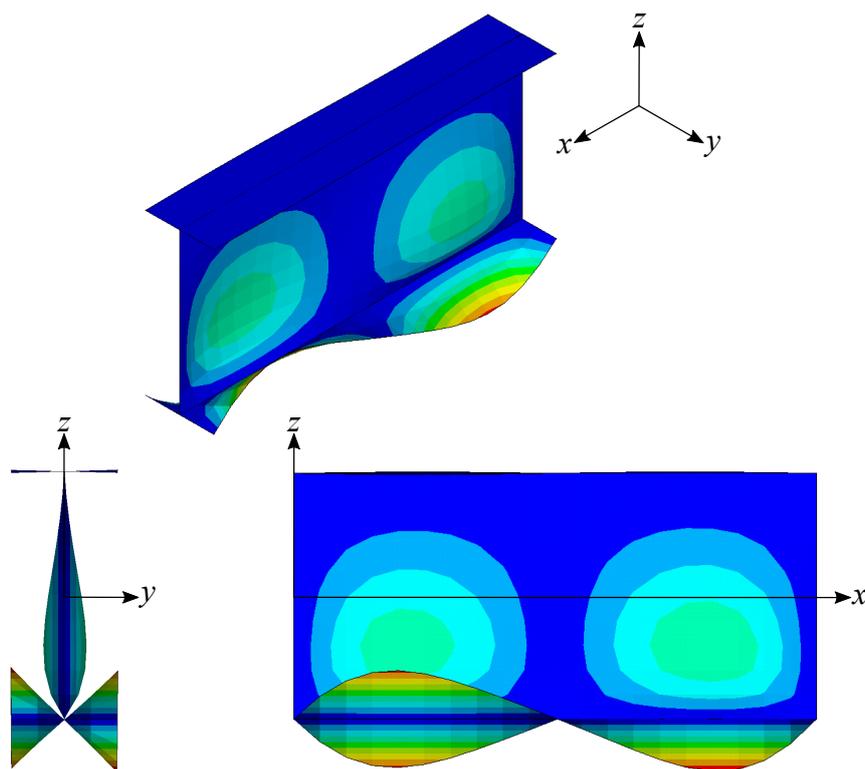


Abb. 5.88: Lokales Beulen eines I-Trägers infolge eines Moments.

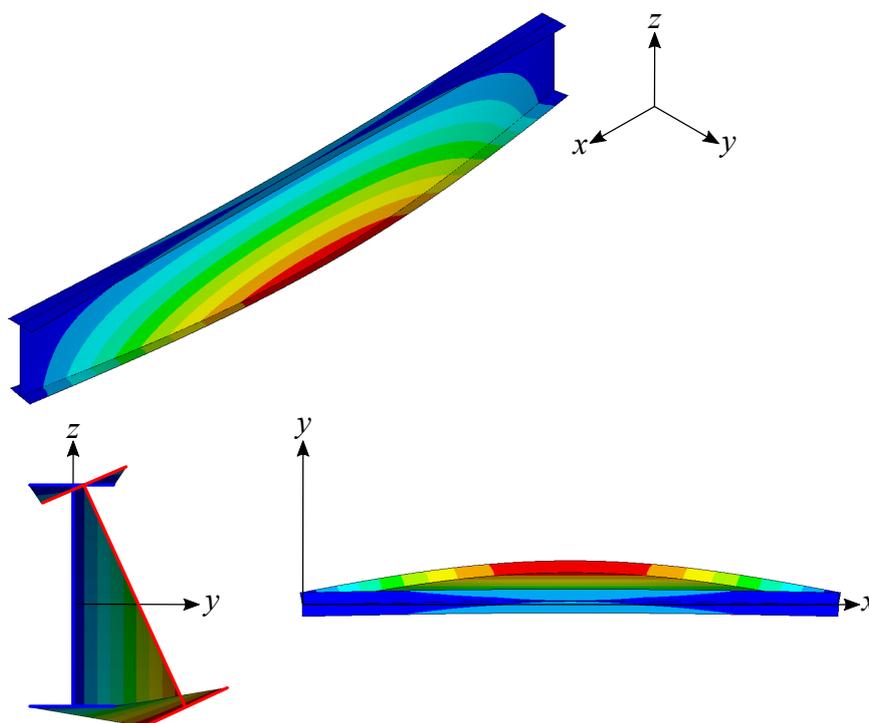


Abb. 5.89: Biegedrillknicken eines I-Trägers infolge eines Moments.

### Belastungsart: Streckenlast

Im nächsten Schritt soll eine konstante Streckenlast auf die Composite-Struktur angebracht werden. Die Streckenlast soll sich auf die gesamte Balkenklänge beziehen. Als Angriffspunkt wird der obere Gurt gewählt. Die Streckenlast soll in diesem Beispiel in

positiver  $z$ -Richtung wirken. Die anderen Belastungsarten wirken in die entgegengesetzte Richtung. Eine Ursache für die Änderung der Richtung liegt darin, dass die numerische Lösung der Beulanalyse bei einer Streckenlast in negativer  $z$ -Richtung, keine globalen Versagensform wie das Kippen hervorruft. Es treten hauptsächlich lokale Beulformen auf. Die Umsetzung der Streckenlast in der FEM wird über eine RBE-Spinne und einen Masterknoten realisiert, der sich in der Balkenmitte befindet.

Gemäß Abbildung 5.90 wird die geschlossen-analytische und numerische Lösung der kritischen Kipplast infolge einer Streckenlast über die Balkenlänge wiedergegeben. In diesem Belastungsfall wird die Laminat-Konfiguration B als Testobjekt verwendet. Die Lösungen der kritischen Kipplast können in reinen lokalen Versagensformen und Gesamtstabilitätsproblemen unterteilt werden. Bis zur einer Balkenlänge von 2 m können reine lokale Beulmoden ermittelt werden. Im Längenbereich  $2 \text{ m} < x < 10 \text{ m}$  ergibt die numerische Lösung eine Interaktion aus lokalen und globalen Versagensarten (siehe Abbildung 5.90). Für lokale Versagensformen stellen sich Halbwellen am oberen Gurt ein. Die Beulamplitude der jeweiligen Halbwellen ist im Vergleich zu den anderen Verformungen der Struktur gering. Für den globalen Anteil des Versagens kann ein Kippverhalten des Composite-

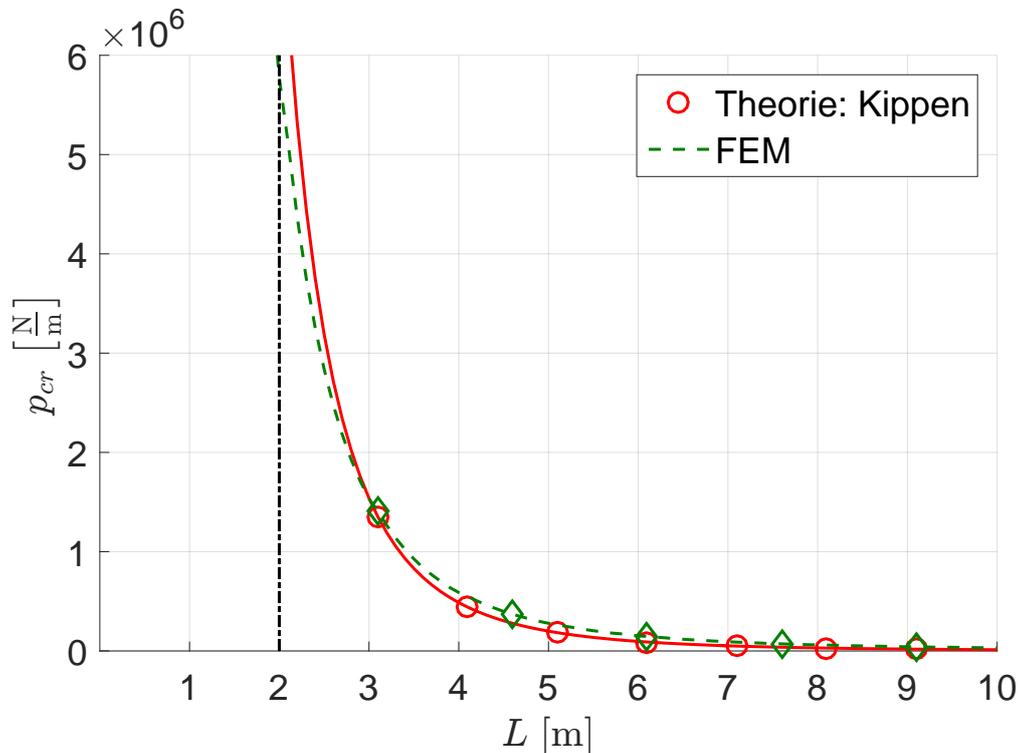


Abb. 5.90: Kritische Streckenlast über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration B.

Trägers entdeckt werden. Hierbei weicht die Struktur seitlich in positiver  $y$ -Richtung aus. Außerdem kann eine Rotation um die Längsachse des Querschnitts entdeckt werden (siehe Abbildung 5.91). Die größte Auslenkung befindet sich am unteren Gurt beim Koordinatenwert  $x = 0,5L$ .

Auch bei der Streckenlast kann keine hundertprozentige Übereinstimmung der numerischen und analytischen Lösung der kritischen Kipplast ermittelt werden. Die Verläufe entlang der Balkenlänge sind relativ ähnlich, jedoch kann ein deutlicher Unterschied zwischen den Werten der kritischen Kipplast ermittelt werden. Da die FE-Analyse zusätzlich

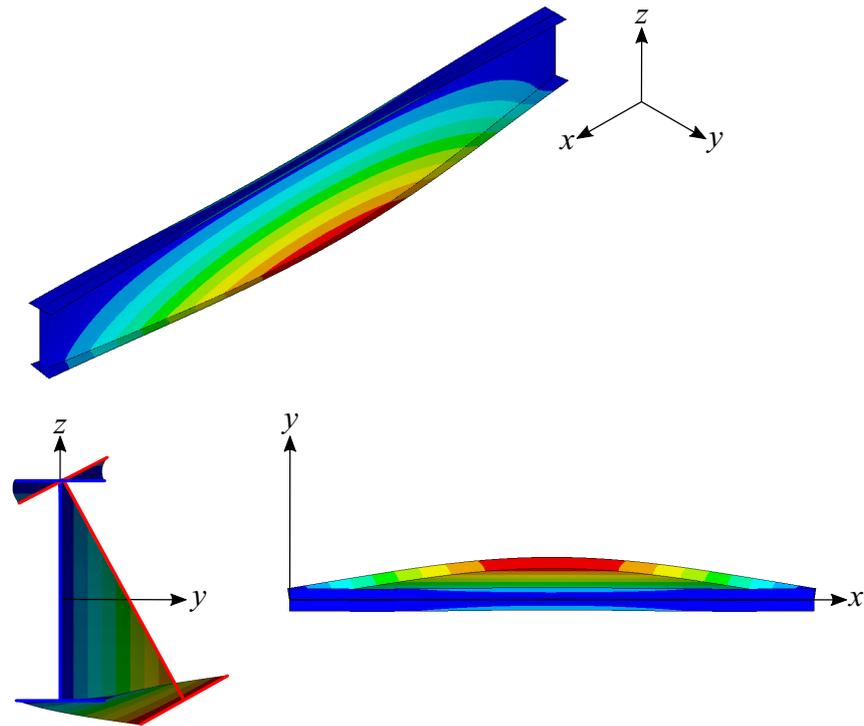


Abb. 5.91: Kippen eines I-Träger infolge einer Streckenlast.

zum Kippversagen lokale Beulmoden berücksichtigt, kann die verwendete Analytik keine besseren Information liefern, weil sie lediglich globale Stabilitätsprobleme behandelt.

### Belastungsart: Einzellast

Abschließend soll ein Composite-Träger untersucht werden, der in der Balkenmitte mit einer Einzellast belastet wird. Die Punktlast befindet sich auf der Symmetrieebene ( $xz$ -Ebene) und wirkt in negativer  $z$ -Richtung. Für die FE-Analyse wird die Einwirkung bei der Koordinate  $x = 0,5L$  am oberen Gurt angesetzt.

Die geschlossen-analytische und numerische Lösung der kritischen Kipplast infolge einer Einzellast, die in der Balkenmitte wirkt, über die Balkenlänge werden in Abbildung 5.92 miteinander verglichen. Als Basis für die Querschnittsgeometrie und Schichtlagen soll die Konfiguration A verwendet werden. Auch für kritische Kipplast infolge Einzellast können zwei Lösungsbereiche für unterschiedliche Versagensarten identifiziert werden. Die Struktur versagt bis zu einer Balkenlänge von 2,75 m an lokalen Beulformen. Balken, die länger sind, rufen ein Gesamtstabilitätsproblem hervor. Das Versagen der Struktur setzt sich aus lokalen Beulmoden und einem globalen Kippen (Biegedrillknicken) zusammen. Bei einem Vergleich der analytischen Lösung des Kippverhaltens mit der Numerik lässt sich feststellen, dass ein ähnlicher Verlauf generiert werden kann. Jedoch können entlang der Abszisse Unterschiede bei der kritischen Kipplast beobachtet werden. Diese Differenzen stellen sich ein, weil die Numerik zusätzlich zum Kippversagen die lokalen Versagensformen berücksichtigt. Die angewandte Theorie kann hingegen ausschließlich das Stabilitätsproblem Kippen darstellen. Aus diesem Grund können auch keine Übereinstimmungen in den Anfangslängen generiert werden.

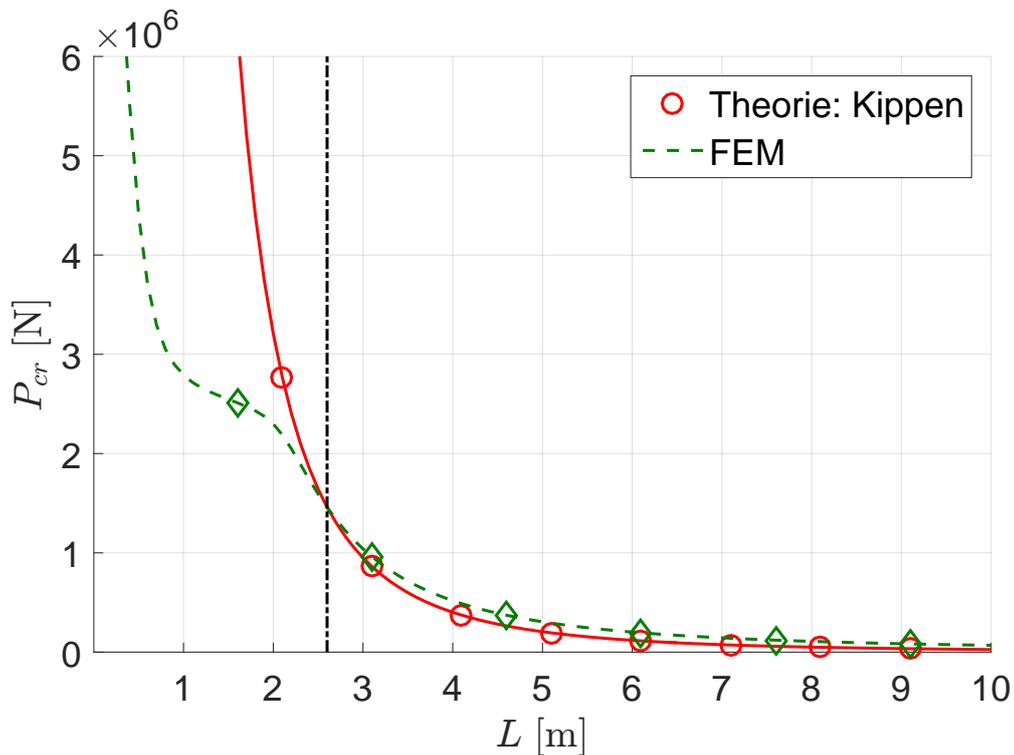


Abb. 5.92: Kritische Einzellast über die Länge eines I-Profiles mit der Laminat-Konfiguration A.

In Abbildung 5.93 wird das Gesamtstabilitätsproblem bei einer Balkenlänge von 5 m aus der FE-Berechnung wiedergegeben. Der Träger kippt seitlich in negativer Richtung der  $y$ -Achse aus. Darüber hinaus entsteht um die Längsachse eine Verdrehung des Querschnitts. Die maximale Auslenkung befindet sich am oberen Gurt. Bei einer Momentenbelastung kann die größte Verschiebung am unteren Gurt festgestellt werden. Die äußeren Ränder weisen keine translatorischen Verformungen auf. Abbildung 5.93 zeigt, dass lokale Beulformen am unteren Gurt festgelegt werden können. Auch hier befinden sich die maximalen Amplituden bei der Koordinate  $x = 0,5L$  an den äußeren Rändern des Gurtes. In Längsrichtung des Gurtes kann nur eine einzige Halbwelle entdeckt werden. An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass die Beulamplitude der Halbwelle wesentlich geringer ist als die Auslenkung, die durch das Kippen verursacht wird.

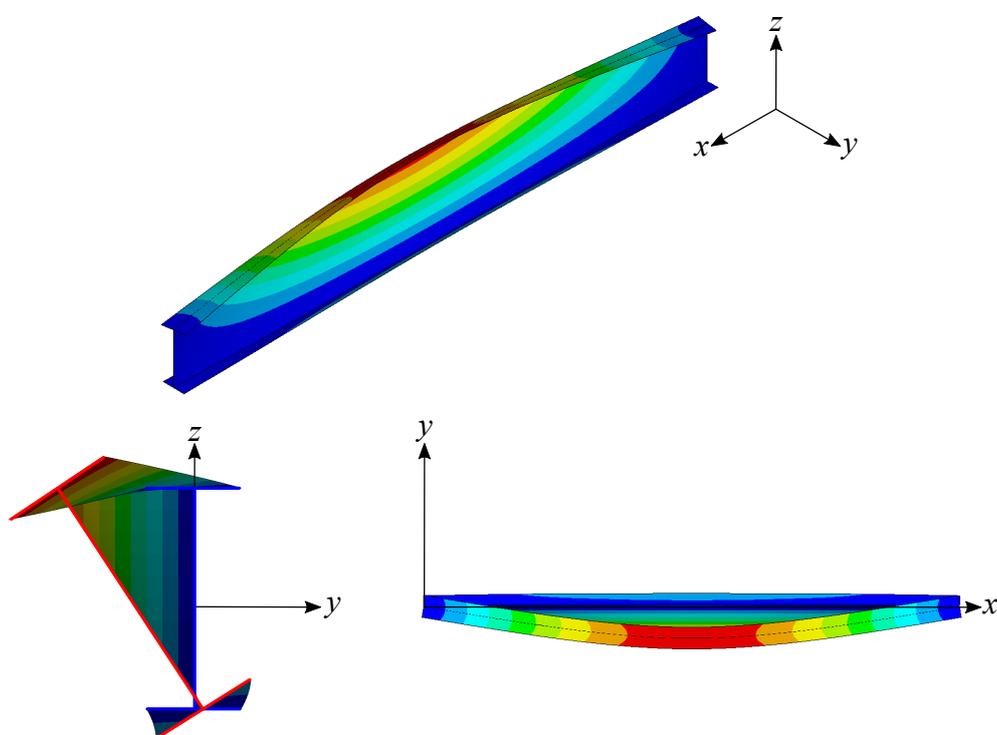


Abb. 5.93: Kippen eines I-Träger infolge einer Einzellast.



# Kapitel 6

## Lokales Beulen mittels Lévy'scher Lösungen

### 6.1 Lokales Beulen mit Hilfe diskreter Plattenmodelle

Die Beurteilung der Gesamtstabilität dünnwandiger Stab- und Balkenstrukturen erfordert zunächst zuverlässige Analysemethoden zur Beurteilung der lokalen Stabilität, also hier des lokalen Beulverhaltens von Flanschen und Stegen solcher Stäbe und Balken. Das vorliegende sowie die beiden darauffolgenden Kapitel werden hierzu verschiedene Analyseansätze vorstellen. In diesem Kapitel gehen wir auf die sog. Lévy'schen Lösungen zur Analyse des lokalen Beulverhaltens von Faserverbundträgern ein. Diese Modelle gelten ausschließlich für orthotrope und symmetrische Lagenaufbauten.

Der Analysezugang beruht auf sog. diskreten Plattenmodellen (s. Abb. 6.1). Das zu untersuchende Segment des Trägerquerschnitts (also entweder Steg oder Flansch), der unter der gleichförmigen einachsigen Druckbelastung  $N_{xx}^0$  stehe, wird aus dem Trägerquerschnitt gedanklich herausgeschnitten und an der so entstandenen Schnittkante mit Drehfedern versehen. Die Steifigkeiten  $k$  der Drehfedern wiederum lassen sich recht einfach aus den Eigenschaften der hieran angrenzenden Querschnittselemente berechnen. Die lokale Beulanalyse beruht dann auf einer Untersuchung des Plattenbeulens des herausgeschnittenen und elastisch eingespannten Trägersegments.

Wir stellen nachfolgend kurz dar, wie man für dünnwandige Trägerstrukturen mit symmetrischen und orthotropen Lagenaufbauten die Ersatzfedersteifigkeiten im Rahmen diskreter Plattenmodelle ermitteln kann.

### 6.2 Ersatzfedersteifigkeiten

#### 6.2.1 Kastenträger

Kommt es bei einem der Segmente eines Trägerquerschnitts zum Beulen, dann steifen die verbleibenden Trägersegmente dieses beulende Segment aus. Hierbei kommt es neben den Beulverformungen auch in den aussteifenden Teilen zu Verformungen, die zu den eintretenden Beulformen affin sind. Kommt es z.B. im Steg (Länge  $a$ ) eines Kastenträgers

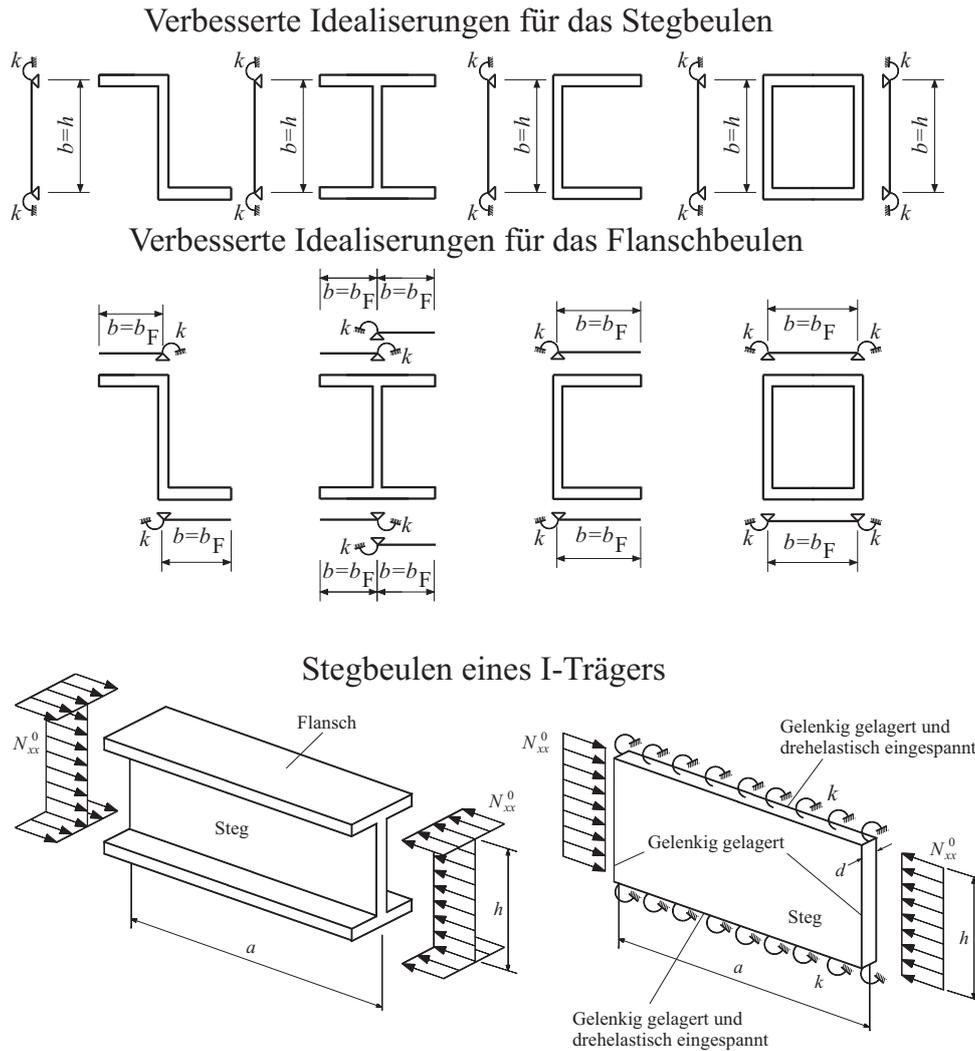


Abb. 6.1: Lokale Beulanalyse von Faserverbundträgern mit Hilfe diskreter Plattenmodelle, aus [104].

zum Beulen mit  $m$  Halbwellen in Trägerlängsrichtung  $x$ , dann zeigen sich auch in den aussteifenden Flanschen Biegeverformungen, die periodisch mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten. Daher treten in Abständen von  $\lambda = \frac{a}{m}$  Knotenlinien in den Biegeflächen auf, wobei  $\lambda = \frac{a}{m}$  die Länge einer Beulhalbwelle darstellt. Die Vorgehensweise ist daher die, dass man die Flansche als Naviersche Platten (also allseitig gelenkig gelagert) auffasst, die an denjenigen Rändern, an denen die Stege angrenzen, durch das Biegemoment  $M_{yy}^0$  belastet werden. Die Biegeverformungen sind dabei aufgrund des hier betrachteten Druckbeulproblems proportional zu  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ . Die Biegefläche einer derart durch Randmomente belasteten aussteifenden Flanschplatte lässt sich angeben als:

$$w_0 = \frac{b\lambda}{2\pi D_{22} \sinh\left(\frac{\pi y}{\lambda}\right)} \left[ \frac{y}{b} \cosh\left(\frac{\pi(y-b)}{\lambda}\right) + \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{\lambda}\right) - \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{\lambda}\right) + \sinh\left(\frac{\pi(y-b)}{\lambda}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi y}{\lambda}\right)} \right] M_{yy}^0. \quad (6.1)$$

Die Plattensteifigkeit  $D_{22}$  ist dabei die Steifigkeit des aussteifenden Segments. Die Breite  $b$  ist entweder  $b = b_F$  (im Falle des Stegbeulens) oder  $b = h$  (im Falle des Flanschbeulens). Man kann hieraus direkt den Verdrehwinkel abhängig vom Randmoment bestimmen:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi D_{22}} \left( 1 + \frac{\frac{\pi b}{\lambda}}{\sinh\left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)} \right) \tanh\left(\frac{\pi b}{2\lambda}\right) M_{yy}^0 = -\frac{\lambda}{D_{22}} \rho\left(\frac{b}{\lambda}\right) M_{yy}^0. \quad (6.2)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Halbwellenlänge  $\lambda$  bislang noch unbekannt ist. Man kann vereinfachend annehmen, dass die Halbwellenlänge  $\lambda$  der Breite  $b = b_R$  des aussteifenden Trägersegmentes entspricht. Die Hilfsfunktion  $\rho\left(\frac{b}{\lambda}\right)$  kann dann als  $\rho\left(\frac{b}{b_R}\right)$  angenähert werden. Es ergibt sich:

$$\varphi = -\frac{b_R}{D_{22}} \rho\left(\frac{b}{b_R}\right) M_{yy}^0. \quad (6.3)$$

Tritt bei einem Kastenquerschnitt lokales Beulen des Steges ein, dann wirkt der Flansch aussteifend. Die Randverdrehung des Flansches ergibt sich dann als:

$$\varphi = -\frac{h}{D_{22}^F} \rho\left(\frac{b_F}{h}\right) M_{yy}^0, \quad (6.4)$$

wobei  $D_{22}^F$  die Plattensteifigkeit des Flansches ist. Die Momentenrandbedingung  $M_{yy}^0 = -k\varphi$  liefert den folgenden Ausdruck für die Steifigkeit  $k$  der Randeinspannung, sofern Stegbeulen auftritt:

$$k = \frac{D_{22}^F}{h\rho\left(\frac{b_F}{h}\right)}. \quad (6.5)$$

Der Einfluss der Längsdruckkräfte der einzelnen Trägersegmente wird geeignet berücksichtigt, indem ein Reduktionsfaktor wie folgt eingeführt wird:

$$r = 1 - \frac{N_{xx,\text{beulend}}^0}{N_{xx,\text{aussteifend}}^0}. \quad (6.6)$$

Die Federsteifigkeit  $k$  ist dann mit  $r$  zu multiplizieren. Die hierin auftretenden Beullasten  $N_{xx,\text{beulend}}^0$  und  $N_{xx,\text{aussteifend}}^0$  sind die lokalen Beullasten des Steges bzw. des Flansches, wobei hierfür vereinfachend Naviersche Randbedingungen angesetzt werden dürfen. Ist die Trägerlänge  $a$  hinreichend groß, dann erhält man:

$$r = 1 - \frac{b_F^2 \sqrt{D_{11}^S D_{22}^S + D_{12}^S + 2D_{66}^S}}{h^2 \sqrt{D_{11}^F D_{22}^F + D_{12}^F + 2D_{66}^F}}. \quad (6.7)$$

Die Plattensteifigkeiten des Steges bzw. des Flansches sind mit entsprechenden Symbolen gekennzeichnet. Im Falle des lokalen Stegbeulens eines Kastenträgers folgt für  $k$ :

$$k = \frac{D_{22}^F}{h\rho\left(\frac{b_F}{h}\right)} \left( 1 - \frac{b_F^2 \sqrt{D_{11}^S D_{22}^S + D_{12}^S + 2D_{66}^S}}{h^2 \sqrt{D_{11}^F D_{22}^F + D_{12}^F + 2D_{66}^F}} \right). \quad (6.8)$$

Man beachte hierbei jedoch, dass die Anwendung dieser einfachen Handformel nur dann zulässig ist, wenn  $N_{xx,\text{beulend}}^0 < N_{xx,\text{aussteifend}}^0$  gilt. Sollte  $r < 0$  gelten, dann ist das als beulend unterstellte Segment nicht auslösend für das lokale Trägerbeulen, und die Beulanalyse ist für das als aussteifend unterstellte Segment durchzuführen.

Im Falle des lokalen Flanschbeulens ergibt sich die Federsteifigkeit  $k$  als:

$$k = \frac{D_{22}^S}{b_F \rho\left(\frac{h}{b_F}\right)} \left( 1 - \frac{h^2 \sqrt{D_{11}^F D_{22}^F + D_{12}^F + 2D_{66}^F}}{b_F^2 \sqrt{D_{11}^S D_{22}^S + D_{12}^S + 2D_{66}^S}} \right). \quad (6.9)$$

### 6.2.2 I-Träger

Kommt es bei einem I-Träger zu einem lokalen Flanschbeulen, dann kann die Federsteifigkeit  $k$  wie folgt berechnet werden:

$$k = \frac{D_{22}^S}{h} \left( 1 - \frac{6h^2}{\pi^2 b_F^2} \frac{D_{66}^F}{\sqrt{D_{11}^S D_{22}^S} + D_{12}^S + 2D_{66}^S} \right). \quad (6.10)$$

Im Falle des lokalen Stegbeulens ergibt sich:

$$k = \frac{D_{22}^F}{h \rho \left( \frac{b_F}{h} \right)} \left( 1 - \frac{\pi^2 b_F^2}{6h^2} \frac{\sqrt{D_{11}^S D_{22}^S} + D_{12}^S + 2D_{66}^S}{D_{66}^F} \right). \quad (6.11)$$

Die Hilfsfunktion  $\rho \left( \frac{b_F}{h} \right)$  kann berechnet werden als:

$$\rho \left( \frac{b_F}{h} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cosh^2 \left( \frac{\pi b_F}{h} \right) + \left( \frac{\pi b_F}{h} \right)^2 + 1}{\frac{\pi b_F}{h} + 3 \sinh \left( \frac{\pi b_F}{h} \right) \cosh \left( \frac{\pi b_F}{h} \right)}. \quad (6.12)$$

### 6.2.3 C- und Z-Träger

Kommt es bei einem C- oder einem Z-Träger zu einem lokalen Flanschbeulen, dann darf die Federsteifigkeit  $k$  berechnet werden als:

$$k = \frac{2D_{22}^S}{h} \left( 1 - \frac{6h^2}{\pi^2 b_F^2} \frac{D_{66}^F}{\sqrt{D_{11}^S D_{22}^S} + D_{12}^S + 2D_{66}^S} \right). \quad (6.13)$$

Kommt es hingegen zu einem Stegbeulen, dann darf Gl. (6.11) angewendet werden.

## 6.3 Lévy'sche Lösungen für das lokale Beulen

### 6.3.1 Idealisierung

Die vorliegenden lokalen Beulprobleme können exakt im Sinne der jeweils zugrundeliegenden Laminattheorie mit Hilfe der sog. Lévy'schen Lösungen analysiert werden. Wir beschränken uns hierbei auf die Untersuchung symmetrischer und orthotroper Lagenaufbauten, wobei der Lastfall ausschließlich einachsiger Druck in  $x$ -Richtung sei. Um eine Lévy'sche Lösung herzuleiten wird davon ausgegangen, dass zwei sich gegenüberliegende Seiten (das seien hier die belasteten Ränder bei  $x = 0$  und  $x = a$ ) gelenkig gelagert sind. Die beiden unbelasteten Ränder bei  $y = 0$  und  $y = b$  können beliebige Randbedingungen aufweisen, sie seien hier für Steg- und Flanschbeulen spezifiziert wie nachfolgend angegeben.

Für das lokale Stegbeulen eines beliebigen Querschnitts nehmen wir eine Platte der Länge  $a$  und der Breite  $b$  an, die an den beiden Längsrändern bei  $y = 0$  und  $y = b$  gelenkig gelagert und dazu elastisch eingespannt (Federsteifigkeit  $k$ ) sei. Hingegen ist das Ersatzmodell für das lokale Flanschbeulen derart, dass einer der beiden Längsränder gelenkig gelagert und elastisch eingespannt sei, der zweite Längsrand hingegen frei von jeglicher Lagerung ist.

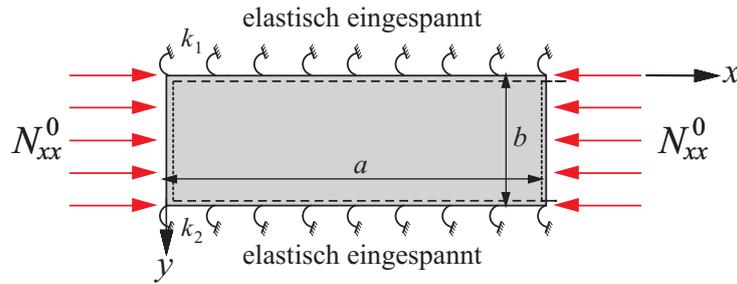


Abb. 6.2: Ersatzmodell für lokales Stegbeulen, aus [104].

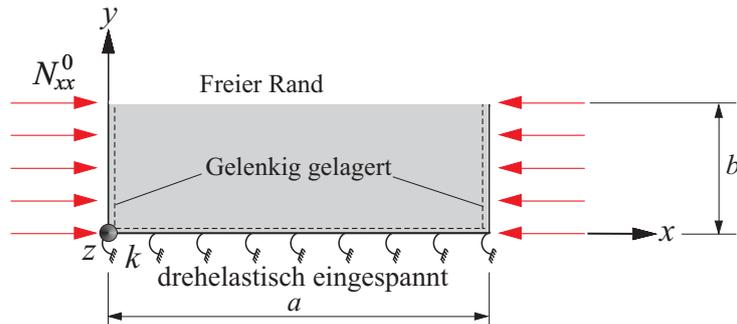


Abb. 6.3: Ersatzmodell für lokales Flanschbeulen, aus [104].

### 6.3.2 Lösungen für klassische Laminattheorie

Wir betrachten die Lévy'sche Lösung zunächst im Rahmen der klassischen Laminattheorie. Die Randbedingungen an den belasteten Rändern  $x = 0$  und  $x = a$  lauten:

$$w_0 = 0, \quad M_{xx}^0 = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0. \quad (6.14)$$

Die Beuldifferentialgleichung, die das Beulverhalten eines symmetrischen und orthotropen Laminats unter einachsigem Druck  $N_{xx}^0$  beschreibt, lautet:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0. \quad (6.15)$$

Der folgende Ansatz für die Beulform  $w_0$  erfüllt die Randbedingungen (6.14) identisch:

$$w_0 = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) W_m(y), \quad (6.16)$$

wobei  $W(y)$  eine noch zu bestimmende Funktion ist. Einsetzen in die Beuldifferentialgleichungen liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4 W_m}{dy^4} - 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 W_m}{dy^2} + \frac{1}{D_{22}} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left( D_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - N_{xx}^0 \right) W_m = 0. \quad (6.17)$$

Ihre Lösung lautet:

$$W_m = C e^{\lambda y}. \quad (6.18)$$

Einsetzen in (6.17) führt auf das folgende charakteristische Polynom zur Berechnung der Exponenten  $\lambda$ :

$$\lambda^4 - 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \lambda^2 + \frac{1}{D_{22}} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left( D_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - N_{xx}^0 \right) = 0. \quad (6.19)$$

Die vier Nullstellen dieses Polynoms lauten:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{D_{22}}} \sqrt{D_{12} + 2D_{66} \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left( N_{xx}^0 \frac{a^2}{m^2\pi^2} - D_{11} \right)}}. \quad (6.20)$$

Die Funktion  $W(y)$  lautet also:

$$W_m = C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} + C_3 e^{\lambda_3 y} + C_4 e^{\lambda_4 y}. \quad (6.21)$$

Die Beulform  $w_0$  gewinnt man damit als:

$$w_0 = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) (C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} + C_3 e^{\lambda_3 y} + C_4 e^{\lambda_4 y}). \quad (6.22)$$

Die Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  lassen sich aus den Randbedingungen an den unbelasteten Rändern gewinnen.

In der überwiegenden Mehrzahl der praktisch relevanten Fälle ist eine Umformung der Lösung (6.21) zulässig wie folgt:

$$W_m = C_1 \cosh(\lambda_1 y) + C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cos(\lambda_3 y) + C_4 \sin(\lambda_3 y), \quad (6.23)$$

mit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{D_{22}}} \sqrt{\sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left( N_{xx}^0 \frac{a^2}{m^2\pi^2} - D_{11} \right)} + D_{12} + 2D_{66}}, \\ \lambda_3 &= \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{D_{22}}} \sqrt{\sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left( N_{xx}^0 \frac{a^2}{m^2\pi^2} - D_{11} \right)} - D_{12} - 2D_{66}}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wir leiten nun die Lévy'sche Lösung für die Plattensituation der Abb. 6.2, also das lokale Stegbeulen, her, und gehen hier von zwei unterschiedlichen Federsteifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$  an den unbelasteten Rändern aus. Die dortigen Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} w_0(y=0) &= 0, & M_{yy}^0(y=0) &= -D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = -k_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=0}, \\ w_0(y=b) &= 0, & M_{yy}^0(y=b) &= -D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = k_2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=b}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Mit der ermittelten Verschiebungslösung ergeben sich die folgenden vier Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten  $C_1, \dots, C_4$ :

$$C_1 + C_3 = 0,$$

$$D_{22} \lambda_1^2 C_1 - k_1 \lambda_1 C_2 - D_{22} \lambda_3^2 C_3 - k_1 \lambda_3 C_4 = 0,$$

$$C_1 \cosh(\lambda_1 b) + C_2 \sinh(\lambda_1 b) + C_3 \cos(\lambda_3 b) + C_4 \sin(\lambda_3 b) = 0,$$

$$[D_{22} \lambda_1 \cosh(\lambda_1 b) + k_2 \sinh(\lambda_1 b)] \lambda_1 C_1 + [D_{22} \lambda_1 \sinh(\lambda_1 b) + k_2 \cosh(\lambda_1 b)] \lambda_1 C_2$$

$$- [D_{22}\lambda_3 \cos(\lambda_3 b) + k_2 \sin(\lambda_3 b)] \lambda_3 C_3 - [D_{22}\lambda_3 \sin(\lambda_3 b) - k_2 \cos(\lambda_3 b)] \lambda_3 C_4 = 0. \quad (6.26)$$

Um eine triviale Lösung zu vermeiden wird die Koeffizientendeterminante zu null gesetzt:

$$\begin{aligned} & [k_1 \lambda_3 (\Lambda_5 - \Lambda_7) + D_{22} \Lambda_8 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)] \sinh(\lambda_1 b) \\ & + [k_1 \lambda_1 (\Lambda_7 - \Lambda_5) - D_{22} \Lambda_6 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)] \sin(\lambda_3 b) \\ & + k_1 (\lambda_1 \Lambda_8 - \lambda_3 \Lambda_6) [\cosh(\lambda_1 b) - \cos(\lambda_3 b)] = 0, \end{aligned} \quad (6.27)$$

mit:

$$\begin{aligned} \Lambda_5 &= [D_{22} \lambda_1 \cosh(\lambda_1 b) + k_2 \sinh(\lambda_1 b)] \lambda_1, & \Lambda_6 &= [D_{22} \lambda_1 \sinh(\lambda_1 b) + k_2 \cosh(\lambda_1 b)] \lambda_1, \\ \Lambda_7 &= [-D_{22} \lambda_3 \cos(\lambda_3 b) - k_2 \sin(\lambda_3 b)] \lambda_3, & \Lambda_8 &= [-D_{22} \lambda_3 \sin(\lambda_3 b) + k_2 \cos(\lambda_3 b)] \lambda_3. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Diese Gleichung beinhaltet die gesuchte Beullast in impliziter Form und erlaubt keine geschlossene Lösung für  $N_{xx}^0$ . Die Lévy'sche Lösungsmethode führt in allen Fällen auf derartige Beulbedingungen und erfordert daher in allen Fällen eine numerische Auswertung. Das macht die Lévy'sche Lösung zwar weniger anwenderfreundlich, sie ist aber zur Verifikation von Näherungslösungen ein unverzichtbares Werkzeug.

Wir betrachten nun das Flanschbeulproblem der Abb. 6.3. Die Randbedingungen an den unbelasteten Rändern lauten:

$$\begin{aligned} w_0(y=0) &= 0, & M_{yy}^0(y=0) &= -D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=0}, \\ M_{yy}^0(y=b) &= -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \Big|_{y=b} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0, \\ \bar{Q}_y(y=b) &= 2 \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial x} \Big|_{y=b} + \frac{\partial M_{yy}^0}{\partial y} \Big|_{y=b} \\ &= -D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \Big|_{y=b} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Wir geben an dieser Stelle direkt die resultierende implizite Beulbedingung an:

$$\begin{aligned} & k (\lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_3 - \lambda_1 \Lambda_1 \Lambda_4) \cosh(\lambda_1 b) \cos(\lambda_3 b) - k (\lambda_3 \Lambda_1 \Lambda_4 + \lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3) \sinh(\lambda_1 b) \sin(\lambda_3 b) \\ & - D_{22} (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) [\Lambda_1 \Lambda_4 \cos(\lambda_3 b) \sinh(\lambda_1 b) + \Lambda_2 \Lambda_3 \cosh(\lambda_1 b) \sin(\lambda_3 b)] \\ & + k (\lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_4 - \lambda_3 \Lambda_1 \Lambda_3) = 0, \end{aligned} \quad (6.30)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= D_{12} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - D_{22} \lambda_1^2, & \Lambda_2 &= D_{12} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + D_{22} \lambda_3^2, \\ \Lambda_3 &= \left[ -D_{22} \lambda_1^2 + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \lambda_1, \\ \Lambda_4 &= \left[ -D_{22} \lambda_3^2 - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \lambda_3. \end{aligned} \quad (6.31)$$

### 6.3.3 Lösungen für Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Ausgangspunkt für das Plattenbeulen nach Schubdeformationstheorie 1. Ordnung sind wieder die Beuldifferentialgleichungen. Diese lauten für einen symmetrisches orthotropes Laminat:

$$\begin{aligned} K \left[ A_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 0, \\ D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} &= K A_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \\ (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} &= K A_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Hierin tauchen von den fünf Freiheitsgraden der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung aufgrund der Symmetrie des Laminats nur noch die Freiheitsgrade  $w_0$ ,  $\psi_x$  und  $\psi_y$  auf. Wir verwenden die folgenden drei Ansätze für  $w_0$ ,  $\psi_x$  und  $\psi_y$ :

$$\begin{aligned} w_0 &= \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) W_m(y), \\ \psi_x &= \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) X_m(y), \\ \psi_y &= \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) Y_m(y). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Diese Ansätze erfüllen die notwendigen Randbedingungen (gelenkig gelagert bei  $x = 0, a$ )

$$w_0 = 0, \quad \psi_y = 0, \quad M_{xx}^0 = 0, \quad (6.34)$$

welche im Rahmen einer Lévy'schen Lösung für zwei sich gegenüberliegende parallele Ränder gefordert werden. Setzt man die Ansätze in die Beuldifferentialgleichungen ein, so erhält man folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} W_m'' &= \frac{W_m}{A_{44}} \beta^2 \left( A_{55} - \frac{N_{xx}^0}{K} \right) + X_m \frac{A_{55}}{A_{44}} \beta - Y_m', \\ X_m'' &= W_m \beta \frac{K A_{55}}{D_{66}} + X_m \frac{1}{D_{66}} (K A_{55} + \beta^2 D_{12}) - Y_m' \beta \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{66}}, \\ Y_m'' &= W_m' \frac{K A_{44}}{D_{22}} + X_m' \beta \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{22}} + Y_m \frac{1}{D_{22}} (\beta^2 D_{66} + K A_{44}). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Hier ist  $K$  der Schubkorrekturfaktor,  $a$  die Länge des Laminats entlang der  $x$ -Koordinate und  $\beta = \frac{m\pi}{a}$ . Ein Strich an der Verschiebungsgröße beschreibt eine Ableitung nach  $y$ , bspw.  $W_m' = \frac{\partial W_m}{\partial y}$ . Diese drei Differentialgleichungen sind gekoppelt und lassen sich in Matrixform in die sog. Zustandsraumdarstellung der Form

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{TZ} \quad (6.36)$$

umschreiben. Hierbei sind

$$\mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} W_m' \\ W_m'' \\ X_m' \\ X_m'' \\ Y_m' \\ Y_m'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Z &= \begin{pmatrix} W_m \\ W'_m \\ X_m \\ X'_m \\ Y_m \\ Y'_m \end{pmatrix} \\
T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta^2}{A_{44}} \left( A_{55} - \frac{N_{xx}^0}{K} \right) & 0 & \frac{A_{55}}{A_{44}} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta \frac{K A_{55}}{D_{66}} & 0 & \frac{1}{D_{66}} (K A_{55} + \beta^2 D_{11}) & 0 & 0 & -\beta \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{66}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K A_{44}}{D_{22}} & 0 & \beta \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{22}} & \frac{1}{D_{22}} (\beta^2 D_{66} + K A_{44}) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Die Lösung lässt sich über einen Exponentialansatz wie folgt herleiten:

$$\mathbf{Z} = e^{\mathbf{T}y} \mathbf{K}. \tag{6.38}$$

Dabei ist  $e^{\mathbf{T}y}$  die sog. Exponentialmatrix:

$$e^{\mathbf{T}y} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 y} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 y} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_6 y} \end{bmatrix} \mathbf{E}^{-1}. \tag{6.39}$$

Die Matrix  $\mathbf{E}$  kennzeichnet die Matrix der Eigenvektoren von  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{E}^{-1}$  die Inverse der Matrix der Eigenvektoren. Die Größen  $\lambda_1$  bis  $\lambda_6$  sind die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{T}$ . Das Einsetzen in die Randbedingungen für den elastisch eingespannten Rand bzw. den freien Rand führt für das Beulproblem zu folgendem Gleichungssystem:

$$\mathbf{M}\mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{6.40}$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  wird über die Randbedingungen bestimmt, indem für den entsprechenden Rand der Wert für  $y$  ( $y = 0, b$ ) eingesetzt und die Exponentialmatrix berechnet wird. Die Randbedingungen lauten für das lokale Flanschbeulen bei  $y = 0$ :

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy}^0 = k\psi_y, \tag{6.41}$$

und für den freien Rand bei  $y = b$ :

$$Q_y = 0, \quad M_{yy}^0 = 0, \quad M_{xy}^0 = 0. \tag{6.42}$$

Ein Steg hat zwei elastisch eingespannte Ränder. Die Randbedingungen lauten hier bei  $y = 0$ :

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy}^0 = k_1\psi_y, \tag{6.43}$$

und bei  $y = b$ :

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy}^0 = -k_2\psi_y. \tag{6.44}$$

Beispielhaft wird die Auswertung im Folgenden für den Flansch gezeigt. Über die Zustandsgrößen des Zustandsvektors  $Z$  ausgedrückt, lauten die entsprechenden Randbedingungen

$$w_0 = Z_1 = 0, \quad \psi_x = Z_3 = 0, \quad M_{yy}^0 - k\psi_y = -kZ_5 + D_{22}Z_6 = 0. \quad (6.45)$$

Für den freien Rand gilt:

$$\begin{aligned} M_{yy}^0 &= -\beta D_{12}Z_3 + D_{22}Z_6 = 0, \\ Q_y &= KA_{44}Z_2 + KA_{44}Z_5 = 0, \\ M_{xy}^0 &= D_{66}Z_4 + \beta D_{66}Z_5 = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die Koeffizienten der Randbedingungen lassen sich für jeden Rand in eine Matrix an die zugehörige Stelle der Zustandsgröße schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(y=y_1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & D_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{(y=y_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta D_{12} & 0 & 0 & D_{22} \\ 0 & KA_{44} & 0 & 0 & KA_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{66} & \beta D_{66} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  berechnet sich dann wie folgt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}_{(y=y_1)}e^{Ty_1} + \mathbf{B}_{(y=y_2)}e^{Ty_2}. \quad (6.48)$$

Für eine nicht-triviale Lösung muss die Determinante der Matrix  $\mathbf{M}$  verschwinden. Da in der Berechnung der Matrix  $\mathbf{M}$  die bisher noch nicht bestimmte Beullast  $N_{xx}^0$  enthalten ist, lässt sich diese Aufgabenstellung nur noch numerisch lösen.

### 6.3.4 Lösungen für Schubdeformationstheorie 3. Ordnung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Beulbedingung sind die Beuldifferentialgleichungen für ein symmetrisches orthotropes Laminat:

$$\begin{aligned} &A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + p_x = 0, \\ &A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + p_y = 0, \\ &A_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{h^2} D_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ &- \frac{4}{h^2} D_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \frac{4}{h^2} D_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4}{h^2} D_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \left( \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) - \frac{16}{9h^4} H_{12} \left( \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{32}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \left( \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& - \frac{16}{9h^4} H_{22} \left( \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \\
& D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - A_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{4}{h^2} D_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{4}{h^2} D_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{16}{h^4} F_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \\
& D_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{22} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - A_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& + \frac{4}{h^2} D_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{4}{h^2} D_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{16}{h^4} F_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Die ersten beiden Gleichungen, welche das Scheibenverhalten beschreiben, sind nur von den kinematischen Größen  $u_0$  und  $v_0$  abhängig, während die drei übrigen Gleichungen, welche das Plattenverhalten beschreiben, nur von den kinematischen Größen  $w_0$ ,  $\psi_x$  und  $\psi_y$  abhängen. Somit ist das Scheiben- vom Plattenverhalten entkoppelt. Die für die Herleitung der Beulbedingung nötigen Gleichungen sind nur die obigen miteinander gekoppelten Gleichungen drei, vier und fünf. Die genannten Gleichungen werden nach den Verschie-

bungsgrößen bzw. deren Ableitungen geordnet:

$$\begin{aligned}
& e_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + e_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + e_3 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + e_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + e_4 \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} + e_5 \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} - e_6 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x} \\
& + e_7 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + e_5 \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} + e_8 \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} - e_9 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = 0, \\
& e_{10} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + e_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + e_{13} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + e_{14} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - e_1 \psi_x - e_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \\
& e_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + e_{14} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - e_5 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + e_{15} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + e_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + e_{17} \psi_y + e_{17} \frac{\partial w_0}{\partial y} = (6.50)
\end{aligned}$$

In den Abkürzungen  $e_1$  bis  $e_{17}$  stehen die Einträge der Laminatsteifigkeitsmatrix nach der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung. Die Abkürzungen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
e_1 &= A_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} + \frac{16}{h^4} F_{55}, \\
e_2 &= A_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} + \frac{16}{h^4} F_{55} - N_{xx}^0, \\
e_3 &= A_{44} - \frac{8}{h^2} D_{44} + \frac{16}{h^4} F_{44}, \\
e_4 &= \frac{4}{3h^2} F_{11} - \frac{16}{9h^4} H_{11}, \\
e_5 &= \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{16}{9h^4} H_{12} + \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{32}{9h^4} H_{66}, \\
e_6 &= \frac{16}{9h^4} H_{11}, \\
e_7 &= -\frac{32}{9h^4} H_{12} - \frac{64}{9h^4} H_{66}, \\
e_8 &= \frac{4}{3h^2} F_{22} - \frac{16}{9h^4} H_{22}, \\
e_9 &= \frac{16}{9h^4} H_{22}, \\
e_{10} &= D_{11} - \frac{8}{3h^2} F_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11}, \\
e_{11} &= D_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{12} + D_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{66}, \\
e_{12} &= \frac{16}{9h^4} H_{11} - \frac{4}{3h^2} F_{11}, \\
e_{13} &= \frac{16}{9h^4} H_{12} + \frac{32}{9h^4} H_{66} - \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{66}, \\
e_{14} &= D_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{66}, \\
e_{15} &= D_{22} - \frac{8}{3h^2} F_{22} + \frac{16}{9h^4} H_{22}, \\
e_{16} &= \frac{16}{9h^4} H_{22} - \frac{4}{3h^2} F_{22}, \\
e_{17} &= \frac{8}{h^2} D_{44} - A_{44} - \frac{16}{h^4} F_{44}. \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen muss ein Ansatz gewählt werden, der die Randbedingungen für gelenkig gelagerte Ränder bei  $x = 0, a$  exakt erfüllt. Diese lauten

nach der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung:

$$w_0 = 0, \quad \psi_y = 0, \quad M_{xx}^0 = 0, \quad P_{xx} = 0. \quad (6.52)$$

Für die elastisch eingespannte Seite lassen sich in der Literatur bisher keine Randbedingungen in der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy finden. Diese müssen daher aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen bestimmt werden. Das Gesamtpotential setzt sich aus dem inneren Potential  $\Pi_i$ , dem äußeren Potential  $\Pi_a$  und der Federenergie  $\Pi_s$  zusammen. Die Variation des Gesamtpotentials lautet dann mit eingesetzten Schnittkraftgrößen:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [N_{xx}^0 \delta u_{0,x} + N_{yy}^0 \delta v_{0,y} + N_{xy}^0 \delta u_{0,y} + N_{xy}^0 \delta v_{0,x} + M_{xx} \delta \psi_{x,x} \\ &+ M_{xx} \delta \psi_{x,x} + M_{yy} \delta \psi_{y,y} + M_{xy} \delta \psi_{x,y} + M_{xy} \delta \psi_{y,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta \psi_{x,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta w_{0,xx} \\ &- \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta \psi_{y,y} - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,yy} - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_{x,y} - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_{y,x} - \frac{8}{3h^2} P_{xy} \delta w_{0,xy} \\ &+ Q_y \delta w_{0,y} + Q_y \delta \psi_y + Q_x \delta w_{0,x} + Q_x \delta \psi_x - \frac{4}{h^2} R_y \delta w_{0,y} - \frac{4}{h^2} R_y \delta \psi_y \\ &- \frac{4}{h^2} R_x \delta w_{0,x} - \frac{4}{h^2} R_x \delta \psi_x] dx dy \\ &- \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx} w_{0,x} \delta w_{0,x} dx dy + \frac{k}{2} \int_0^a 2\psi_y(y=0) \delta \psi_y(y=0) = 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die in den Verschiebungsgrößen auftauchenden Ableitungen müssen partiell integriert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 \delta u_{0,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b N_{xx}^0 \delta u_0 \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx,x}^0 \delta u_0 dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{yy}^0 \delta v_{0,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a N_{yy}^0 \delta v_0 \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{yy,y}^0 \delta v_0 dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy}^0 \delta u_{0,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a N_{xy}^0 \delta u_0 \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy,y}^0 \delta u_0 dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy}^0 \delta v_{0,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b N_{xy}^0 \delta v_0 \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy,x}^0 \delta v_0 dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xx}^0 \delta \psi_{x,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b M_{xx}^0 \delta \psi_x \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xx,x}^0 \delta \psi_x dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{yy}^0 \delta \psi_{y,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a M_{yy}^0 \delta \psi_y \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{yy,y}^0 \delta \psi_y dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_{x,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_x \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy,y}^0 \delta \psi_x dx dy, \\ \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_{y,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b M_{xy}^0 \delta \psi_y \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy,x}^0 \delta \psi_y dx dy, \\ - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta \psi_{x,x} dx dy &= -\frac{1}{2} \int_0^b \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta \psi_x \Big|_0^a dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} \delta \psi_x dx dy, \\ - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta w_{0,xx} dx dy &= -\frac{1}{2} \int_0^b \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta w_{0,x} \Big|_0^a dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} \delta w_0 \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xx,xx} \delta w_0 dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta \psi_{y,y} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta \psi_y \Big|_0^b dx + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} \delta \psi_y dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,yy} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,y} \Big|_0^b dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} \delta w_0 \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{yy,yy} \delta w_0 dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_{x,y} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_x \Big|_0^b dx + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xy,y} \delta \psi_x dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_{y,x} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^b \frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta \psi_y \Big|_0^a dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{3h^2} P_{xy,x} \delta \psi_y dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a P_{xy} \delta w_{0,xy} dx dy = -\frac{1}{2} \frac{8}{3h^2} P_{xy} \delta w_0 \Big|_0^a \Big|_0^b + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{8}{3h^2} P_{xy,x} \delta w_0 \Big|_0^b dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{8}{3h^2} P_{xy,xy} \delta w_0 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{8}{3h^2} P_{xy,y} \delta w_0 \Big|_0^a dy, \\
& \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_y \delta w_{0,y} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^a Q_y \delta w_0 \Big|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_{y,y} \delta w_0 dx dy, \\
& \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_x \delta w_{0,x} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^b Q_x \delta w_0 \Big|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_{x,x} \delta w_0 dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{h^2} R_y \delta w_{0,y} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{4}{h^2} R_y \delta w_0 \Big|_0^b dx + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{h^2} R_{y,y} \delta w_0 dx dy, \\
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{h^2} R_x \delta w_{0,x} dx dy = -\frac{1}{2} \int_0^b \frac{4}{h^2} R_x \delta w_0 \Big|_0^a dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{4}{h^2} R_{x,x} \delta w_0 dx dy, \\
& - \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 w_{0,x} \delta w_{0,x} dx dy = - \int_0^b N_{xx}^0 w_{0,x} \delta w_0 \Big|_0^a dy + \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx dy.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Das zusammengefasste Ergebnis lautet schließlich:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [(N_{xx,x}^0 + N_{xy,y}^0) \delta u_0 + (N_{yy,y}^0 + N_{xy,x}^0) \delta v_0 \\
& + \left( \frac{4}{3h^2} P_{xx,xx} + \frac{4}{3h^2} P_{yy,yy} + Q_{y,y} + Q_{x,x} - \frac{4}{h^2} R_{y,y} - \frac{4}{h^2} R_{x,x} - 2N_{xx}^0 w_{0,xx} \right) \delta w_0 \\
& + \left( M_{xx,x}^0 + M_{xy,y}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xy,y} - Q_x + R_x \right) \delta \psi_x \\
& + \left( M_{yy,y}^0 + M_{xy,x}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} - \frac{4}{3h^2} P_{xy,x} - Q_y + R_y \right) \delta \psi_y] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^a \left[ (N_{xy}^0 \delta u_0 + N_{yy}^0 \delta v_0 + \left( \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} + \frac{8}{3h^2} P_{xy,x} + Q_y - \frac{4}{h^2} R_y \right) \delta w_0 \right. \\
& + \left. \left( M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \right) \delta \psi_x + \left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) \delta \psi_y - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,y} \Big|_0^b \right. \\
& + \left. k \psi_y(y=0) \delta \psi_y(y=0) + k \psi_y(y=b) \delta \psi_y(y=b) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^b \left[ (N_{xx}^0 \delta u_0 + N_{xy}^0) \delta v_0 + \left( \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} + \frac{8}{3h^2} P_{xy,y} + Q_x - \frac{4}{h^2} R_x \right) \delta w_0 \right. \\
& + \left. \left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) \delta \psi_x + \left( M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \right) \delta \psi_y - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,y} \right] \Big|_0^a dy \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{8}{3h^2} P_{xy} \delta w_0 \right) \Big|_0^a = 0.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Betrachtet man das zweite Integral (in den Grenzen von 0 bis  $a$ ), so kann man die Randbedingungen für einen elastisch eingespannten Rand ablesen, da jeder Term verschwinden muss, um die Gleichung zu erfüllen. Entweder wird die Variationsgröße zu null, oder der jeweilige Klammerterm davor. So lauten die Randbedingungen des Flansches für einen elastisch eingespannten Rand bei  $y = 0$

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy} = k\psi_y, \quad P_{yy} = 0, \tag{6.56}$$

und für den freien Rand bei  $y = b$

$$\begin{aligned}
M_{yy}^0 &= 0, \quad P_{yy} = 0, \\
M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} &= 0, \\
Q_y - \frac{4}{h^2} R_y + \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Die Randbedingungen des Stegs lauten bei  $y = 0$

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy} = k_1\psi_y, \quad P_{yy} = 0, \tag{6.58}$$

und bei  $y = b$

$$w_0 = 0, \quad \psi_x = 0, \quad M_{yy} = -k_2\psi_y, \quad P_{yy} = 0. \tag{6.59}$$

Die Ansätze für die Verschiebungsgrößen  $w_0$ ,  $\psi_x$  und  $\psi_y$  lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
w_0 &= W_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \\
\psi_x &= X_m(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \\
\psi_y &= Y_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right).
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Diese Ansätze werden in die drei Beuldifferentialgleichungen eingesetzt und nach den höchsten Ableitungen aufgelöst. Dies führt dann zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
W_m'''' &= W_m \frac{-\beta^2 e_2 - \beta^4 e_4}{e_9} + W_m'' \frac{e_3 - \beta e_7}{e_9} + X_m \frac{-\beta^3 e_4 - \beta e_1}{e_9} - X_m'' \frac{\beta e_5}{e_9} \\
&+ Y_m' \frac{e_3 \beta^2 e_5}{e_9} + Y_m''' \frac{e_8}{e_9}, \\
X_m'' &= W_m \frac{\beta e_1 + \beta^3 e_{12}}{e_{14}} - W_m'' \beta \frac{e_{13}}{e_{14}} + X_m \frac{\beta^2 e_{10} + e_1}{e_{14}} - Y_m' \frac{\beta e_{11}}{e_{14}}, \\
Y_m'' &= W_m' \frac{-\beta^2 e_5 - e_{17}}{e_{15}} - W_m''' \frac{e_{16}}{e_{15}} + X_m' \beta \frac{e_{11}}{e_{15}} + Y_m \frac{\beta^2 e_{14} - e_{17}}{e_{15}}.
\end{aligned}$$

(6.61)

Ein Strich an der Verschiebungsgröße beschreibt eine Ableitung nach  $y$ , bspw.  $W'_m = \frac{\partial W_m}{\partial y}$ . Die drei gekoppelten Differentialgleichungen sind nun in ein DGL-System zu überführen. Aufgrund der hohen Ableitungen  $X''_m$  und  $Y'''_m$  in der ersten Gleichung lassen sich die DGLn nicht direkt in ein System überführen. Es wird zunächst die dritte Gleichung für  $Y'''_m$  einmal nach  $y$  abgeleitet und dann die zweite Gleichung für  $X''_m$  dort eingesetzt. Anschließend wird die sich ergebende Gleichung für  $Y'''_m$  und die zweite Gleichung für  $X''_m$  in die erste Gleichung für  $W'''_m$  eingesetzt. Dies führt zu folgenden DGLn:

$$\begin{aligned} W'''_m &= C_1 W_m + C_2 W''_m + C_3 X_m + C_4 Y'_m, \\ X''_m &= C_5 W_m - C_6 W''_m + C_7 X_m - C_8 Y'_m, \\ Y'''_m &= C_9 W'_m - C_{10} W'''_m + C_{11} X'_m + C_{12} Y_m, \end{aligned} \quad (6.62)$$

mit den Konstanten  $C_1$  bis  $C_{12}$  gemäß:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e_8 C_{11} C_5 - \beta^2 e_2 - \beta^4 e_6 - \beta e_5 C_5}{e_9 + e_8 C_{10}}, \\ C_2 &= \frac{e_3 - \beta^2 e_7 + \beta e_5 C_6 + e_8 (C_9 - C_{11} C_6)}{e_9 + e_8 C_{10}}, \\ C_3 &= \frac{\beta^3 e_4 - \beta e_1 - \beta e_5 C_7 + e_8 C_{11} C_7}{e_9 + e_8 C_{10}}, \\ C_4 &= \frac{\beta e_5 C_8 + e_3 - \beta^2 e_5 + e_8 (C_{12} - C_{11} C_8)}{e_9 + e_8 C_{10}}, \\ C_5 &= \frac{\beta e_1 + \beta^3 e_{12}}{e_{14}}, \\ C_6 &= \beta \frac{e_{13}}{e_{14}}, \\ C_7 &= \frac{\beta^2 e_{10} + e_1}{e_{14}}, \\ C_8 &= \frac{\beta e_{11}}{e_{14}}, \\ C_9 &= \frac{-\beta^2 e_5 - e_{17}}{e_{15}}, \\ C_{10} &= \frac{e_{16}}{e_{15}}, \\ C_{11} &= \beta \frac{e_{11}}{e_{15}}, \\ C_{12} &= \frac{\beta^2 e_{14} - e_{17}}{e_{15}}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Somit kommt man zu einem DGL-System erster Ordnung

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{TZ} \quad (6.64)$$

mit den Größen

$$\begin{aligned}
 Z' &= \begin{bmatrix} W'_m \\ W''_m \\ W'''_m \\ W''''_m \\ X'_m \\ X''_m \\ Y'_m \\ Y''_m \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} W_m \\ W'_m \\ W''_m \\ W'''_m \\ X_m \\ X'_m \\ Y_m \\ Y'_m \end{bmatrix}, \\
 T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & -C_6 & 0 & C_7 & 0 & 0 & -C_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_9 & 0 & -C_{10} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.65)
 \end{aligned}$$

Wir verwenden einen Exponentialansatz wie folgt:

$$\mathbf{Z} = e^{Ty} \mathbf{K}. \quad (6.66)$$

Dabei ist  $e^{Ty}$  die sog. Exponentialmatrix:

$$e^{Ty} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 y} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 y} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_8 y} \end{bmatrix} \mathbf{E}^{-1}. \quad (6.67)$$

$\mathbf{E}$  kennzeichnet die Matrix der Eigenvektoren von  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{E}^{-1}$  die Inverse der Matrix der Eigenvektoren. Die Größen  $\lambda_1$  bis  $\lambda_8$  sind die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{T}$ . Das Einsetzen der Gleichung (6.66) in die Randbedingungen für den elastisch eingespannten Rand bzw. den freien Rand führt für das Beulproblem zu folgendem Gleichungssystem:

$$\mathbf{M}\mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (6.68)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  wird über die Randbedingungen bestimmt, indem für den entsprechenden Rand der Wert für  $y$  ( $y = 0, b$ ) eingesetzt und die Exponentialmatrix berechnet wird. Beispielhaft wurde diese Berechnung bereits im Rahmen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung gezeigt, weshalb der Schritt an dieser Stelle ausgelassen wird.

Für die nicht-triviale Lösung muss die Determinante von  $\mathbf{M}$  verschwinden. Dies ist wie bereits für die Lösung in der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung nur noch numerisch möglich. Die numerische Lösung wird im nachfolgenden Abschnitt erläutert.

## 6.4 Numerische Lösung

Für die numerische Lösung des Beulproblems wird zunächst eine Matrix mit Näherungslösungen (bspw. aus FEM-Berechnungen) für das jeweilige Beulproblem eingelesen. Diese dienen als Startwerte für die numerische Berechnung. Danach werden die Werte der

Laminat-Steifigkeitsmatrix berechnet. In zwei geschachtelten Schleifen werden zum einen die Zahl  $m$  der Halbwellen sowie zum anderen die diskreten Seitenlängen  $a$  durchgegangen. Dann wird ein Vektor mit Beullasten gefüllt, welche in einem Intervall um den jeweiligen Startwert liegen. Für jede dieser Beullasten wird die Matrix  $M$  und dessen Determinante in einer weiteren Schleife berechnet. Die Berechnung der Matrix  $M$  wird in einem Unterprogramm durchgeführt, welches im Wesentlichen das Einarbeiten der Randbedingungen beinhaltet. Das Ergebnis der Determinante wird in einen Vektor geschrieben. Als Ergebnis der Beullast wird diejenige Last gewählt, für die die Determinante von  $M$  am kleinsten ist. An dieser Stelle sei erwähnt, dass das Ergebnis aufgrund der numerischen Lösung nicht mehr exakt ist. Es kann nicht sichergestellt werden, dass die exakt richtige Beullast gewählt wird, mit der die Determinante von  $M$  verschwindet. Anschließend wird die gefundene Lösung für die Beullast in eine leere Matrix übertragen, sodass nachvollziehbar ist, für welche Halbwellenzahl  $m$  und für welche Seitenlänge  $a$  die Lösung steht. Um die Beulkurve zu zeichnen, werden für jede Seitenlänge  $a$  die Minima gesucht. Das Ergebnis wird dann über die Seitenlänge  $a$  aufgetragen.

Es hat sich gezeigt, dass das Programm zur Lösung des Beulproblems nicht immer fehlerfrei arbeitet und sich einige Probleme aufgezeigt haben, welche das Ergebnis ungenau werden lassen.

An erster Stelle sind hier die sehr hohen Konditionszahlen der Matrix  $M$  zu nennen. Diese bewegen sich je nach den Steifigkeitswerten des Laminats im Bereich von  $10^{15}$  bis  $10^{25}$ . Diese Werte sind für numerische Berechnungen sehr hoch. Der Versuch, dem durch Einheitenumrechnung entgegenzuwirken, hat nur wenig bewirkt. Aus den hohen Konditionszahlen folgt, dass eine geringe Abweichung der Beullast bereits eine sehr große Abweichung der Determinante von  $M$  zur Folge hat. Dies bedeutet, dass das Intervall um den Startwert der Beullast herum sehr dicht bzw. fein befüllt werden muss. Somit wird die Schleife zur Berechnung der Determinante von  $M$  sehr häufig durchlaufen und die Rechenzeit erhöht sich entsprechend. Zudem muss kritisch hinterfragt werden, inwieweit man den Ergebnissen trauen kann. Es sollte bei der Ausführung des Programms immer zunächst eine Beullast für eine bestimmte Seitenlänge  $a$  und Halbwellenzahl  $m$  beispielhaft berechnet werden, bei der das Intervall sehr fein befüllt wird. Dann sollte der Verlauf der Determinante über die Beullasten betrachtet werden. Somit kann abgeschätzt werden, wie groß das Intervall für die gesamte Berechnung gewählt werden sollte.

Ein weiteres Problem ist, dass die gesuchte Lösung nicht im gewählten Intervall liegen könnte. In diesem Fall wählt der Algorithmus i.d.R. eine Lösung, welche am Rand des Intervalls liegt, weil an dieser Stelle die Determinante am geringsten wird. Dieses Problem lässt sich beheben, wenn Lösungen in einem kleinen Bereich des Intervall-Randes ungültig gemacht werden. In diesem Fall muss das Programm mit einem besser gewählten Intervall erneut durchgeführt werden. Sobald für einen Punkt einer bestimmten Kombination  $(a_i, m_j)$  eine Lösung gefunden wurde, lässt sich das Intervall für den nächsten Punkt  $(a_{i+1}, m_j)$  in Abhängigkeit des zuvor gefundenen Punktes  $(a_i, m_j)$  sehr gut wählen, da die beiden aufeinanderfolgenden Punkte für eine sinnvolle Lösung nahe zusammenliegen müssen. Somit kann der Punkt  $(a_i, m_j)$  als Startwert für den Punkt  $(a_{i+1}, m_j)$  verwendet werden.

## 6.5 Auswertung

In diesem Kapitel werden zunächst die Ergebnisse der numerischen Berechnung der Beulkurven dargestellt und anschließend mit anderen Lösungen verglichen. Es werden jeweils für verschiedene Lamine die Beulkurven gezeigt. Dabei muss für jede Kombination  $(a_i, m_j)$  die Beullast bestimmt werden. Hierbei ist  $a$  die Seitenlänge und  $m$  die Halbwellenzahl. Anschließend wird für jede Seitenlänge  $a_i$  die kleinste Beullast gewählt.

Es werden hier Beulkurven für drei verschiedene Hallenträger dargestellt (s. dazu auch Kapitel 3, Tabelle 3.9). Alle drei Träger nutzen den gleichen Steg. Es ändert sich für einen Träger nur der Flansch. Somit ergeben sich drei Flansch-Beulkurven und eine Steg-Beulkurve. Die Beullasten werden für  $m = 10$  Halbwellenzahlen beim Flansch und  $m = 19$  Halbwellenzahlen beim Steg berechnet. Die Länge variiert für die Beulkurven von  $a = 0.5$  m bis  $a = 8$  m. Die Ergebnisse der einzelnen Laminattheorien werden hier miteinander verglichen. Genau genommen verhalten sich die Lamine nicht exakt orthotrop. Es wurde jedoch der nicht-orthotrope Teil der Steifigkeitsmatrix zu null gesetzt. Dies ist ebenfalls in der Lösung nach klassischer Laminattheorie geschehen. Die Vergleichbarkeit ist daher gewährleistet.

### 6.5.1 Ergebnisse und Auswertung

Für die vier Lamine sind in den Bildern 6.4 bis 6.7 zusammenfassend die Ergebnisse aus der klassischen Laminattheorie (CLPT), der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT) sowie der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung (TSDT) gezeigt.

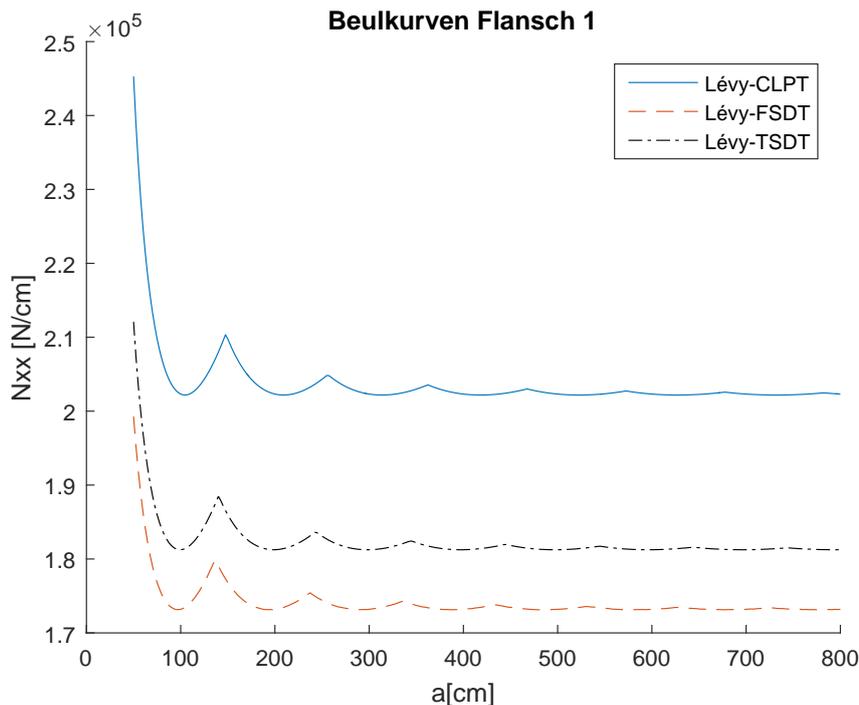


Abb. 6.4: CLPT-, FSDT- und TSDT-Beulkurven Flansch 1

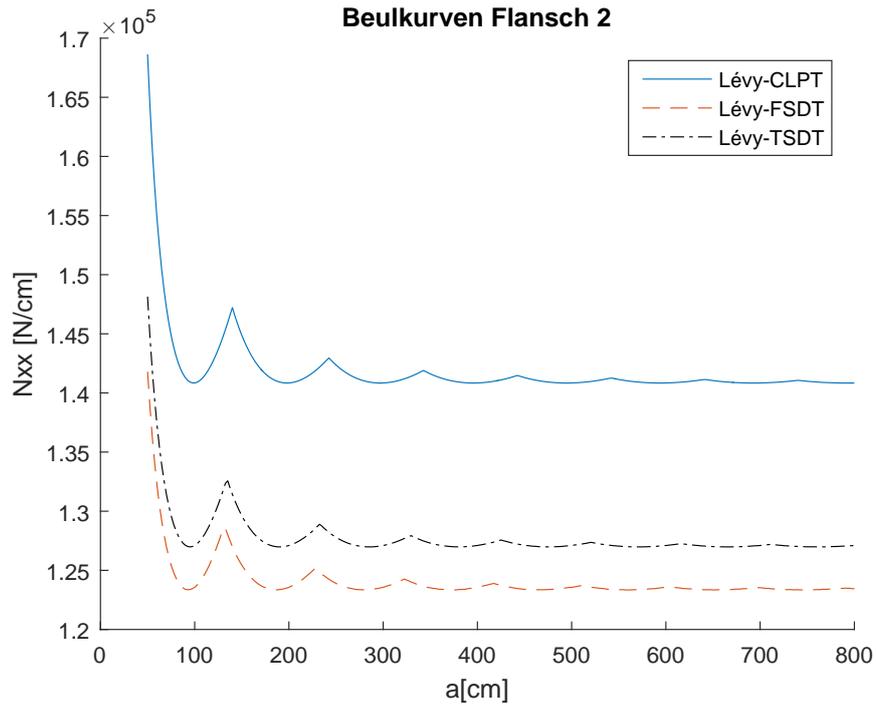


Abb. 6.5: CLPT-, FSDT- und TSDT-Beulkurven Flansch 2

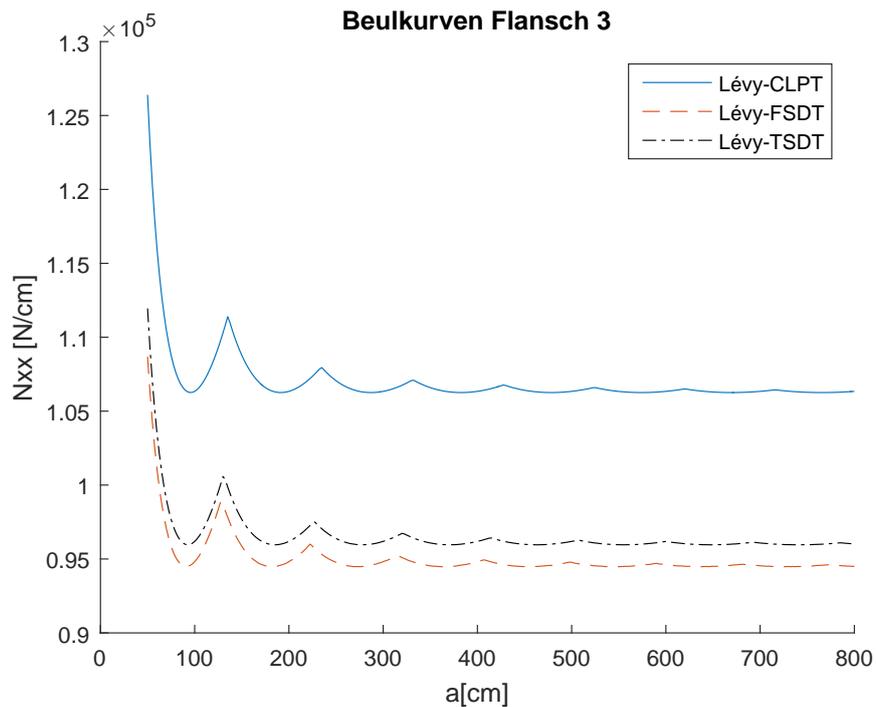


Abb. 6.6: CLPT-, FSDT- und TSDT-Beulkurven Flansch 3

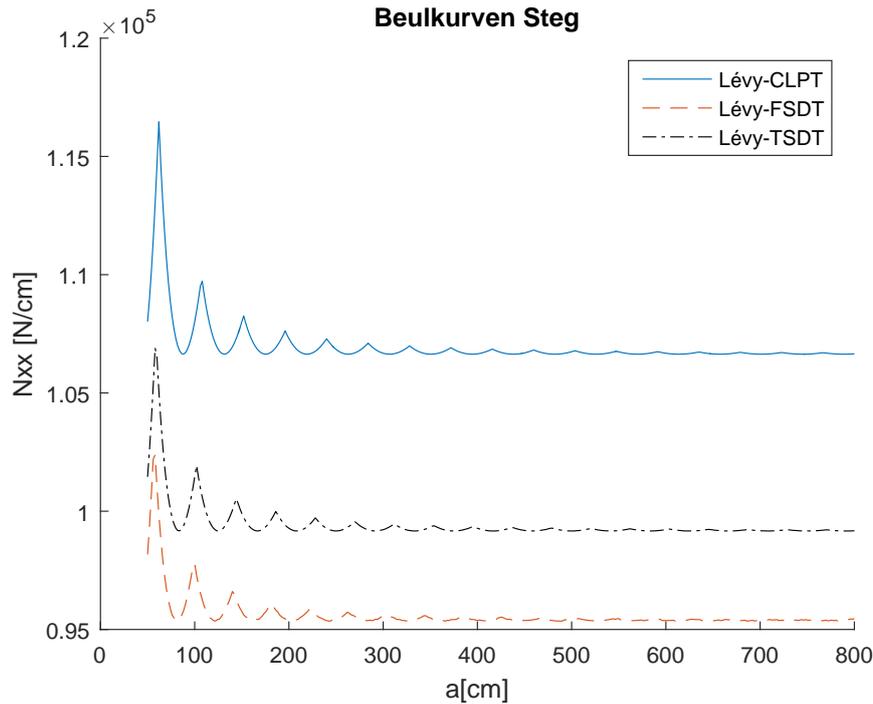


Abb. 6.7: CLPT-, FSDT- und TSDT-Beulkurven Steg

Für alle vier Laminare ergibt sich, dass die Kurven für FSDT und TSDT deutlich unter den CLPT-Kurven liegen. Die beiden Kurven FSDT und TSDT liegen nahe beieinander. Diese Nähe zwischen FSDT und TSDT ist auch in ähnlichen Berechnungen z.B. in Reddy [18] zu finden. Überraschend ist jedoch, dass die TSDT-Kurven über den FSDT-Kurven liegen. Man würde aufgrund des komplexeren Verschiebungsfeldes erwarten, dass die TSDT-Kurven unter den FSDT-Kurven liegen. Literaturangaben aus Reddy [18] zeigen jedoch, dass die Lösungen der FSDT und TSDT häufig nahe beieinander sind. Somit könnte das Ergebnis auch eine Folge von numerischer Unsicherheit sein, aber wird vor allem vermutlich durch die doch recht beliebige Ermittlung des Schubkorrekturfaktors im Rahmen der FSDT begründbar sein.

Zu den folgenden drei Beispielen sind bereits FEM-Rechnungen in CLPT und FSDT durchgeführt worden. Die Parameter zur Anordnung der Schichten, Dicke, Breite und Höhe dieser Laminare sind in Kühn et al. [136] aufgeführt. Alle Laminare erfüllen die Randbedingungen des Stegs.

Für die drei Beispiel-Laminare sind bereits FE-Rechnungen durchgeführt worden. Die Grafiken zeigen jedoch nur die Kurven nach Lévy für FSDT und TSDT. Es sei angemerkt, dass für die drei Laminare die FEM-Kurve für FSDT nahezu mit der Lévy-FSDT-Kurve übereinstimmt. Daher wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit die FEM-Kurve nicht mit in die Grafiken mit einbezogen.

Wie zu erwarten, liegen die TSDT-Kurven bei allen Laminaren ein geringes Stück unter den FSDT-Kurven. Je mehr Einzelschichten die Laminare aufweisen, desto größer ist der Versatz zwischen FSDT- und TSDT-Lösung. Dies ist ebenfalls zu erwarten gewesen. Je dicker die Laminare werden, desto größer werden die Einträge der Steifigkeitsmatrix. Bei der TSDT-Matrix bleiben die neuen Einträge (im Vergleich zur FSDT-Matrix)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{D}$  für dünne Laminare gering, sodass dünnere Laminare weniger vom Einfluss

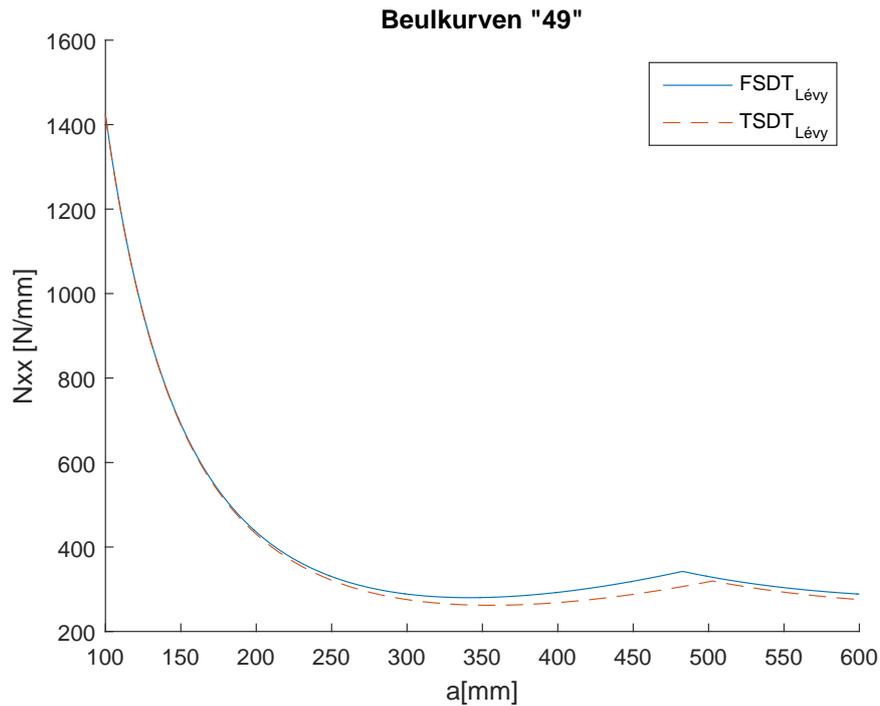


Abb. 6.8: Lévy-FSDT und -TSDT Steg 49

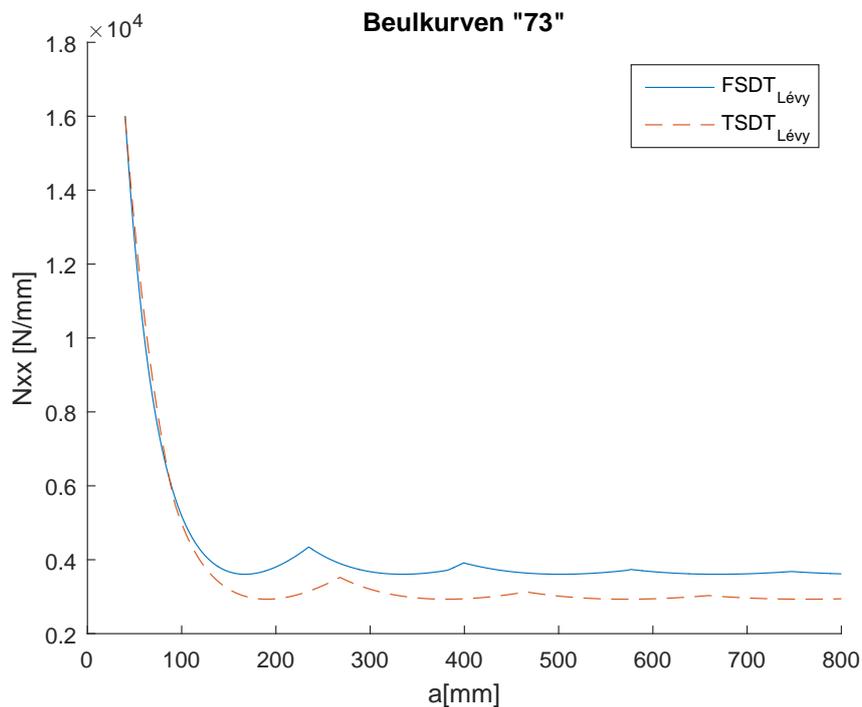


Abb. 6.9: Lévy-FSDT und -TSDT Steg 73

dieser Steifigkeiten erfasst werden, als dickere Lamine. Die Grafiken 6.8, 6.9 und 6.10 bestätigen diese Annahme.

Insgesamt zeigt sich also, dass die lokale Beulanalyse der Segmente dünnwandiger schubweicher Faserverbund-Träger mittels der Lévy'schen Lösung gelingt, sich aber recht

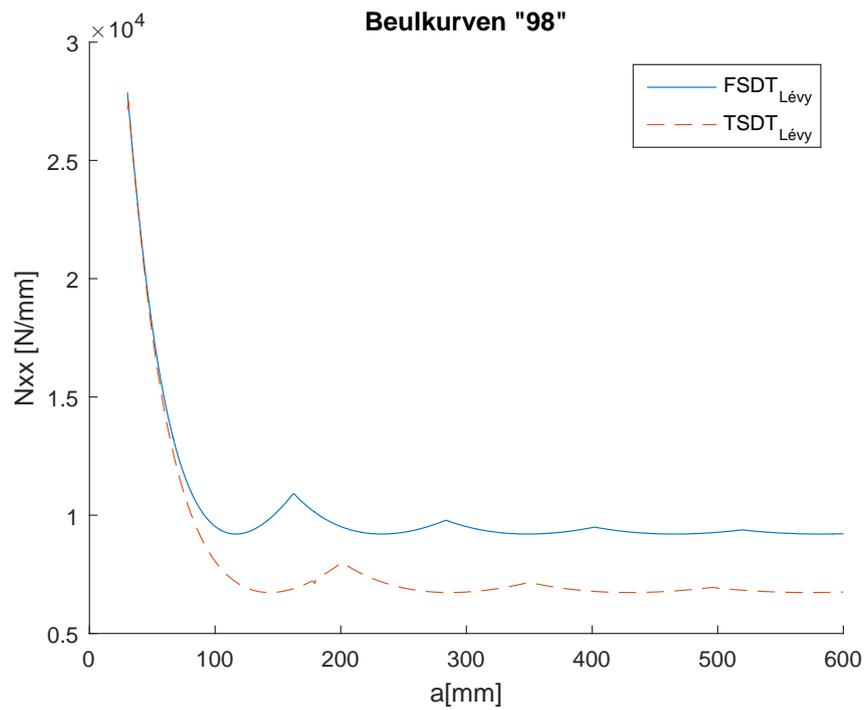


Abb. 6.10: Lévy-FSDT und -TSDT Steg 98

umständlich und wenig anwenderfreundlich gestaltet. Wir werden daher auf diese Art der lokalen Beulanalyse im Folgenden nicht mehr weiter eingehen.



# Kapitel 7

## Lokales Beulen mittels geschlossen-analytischer Methoden

### 7.1 Einführung

Energiebasierte Verfahren zur analytischen Berechnung des Beulverhaltens von Laminaten beruhen im Wesentlichen auf Aussagen über den Energiehaushalt des betrachteten Laminats und nutzen das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials in Verbindung mit dem Ritz-Verfahren, welche zum näheren Verständnis in diesem Kapitel kurz erläutert werden sollen. Konkretisiert werden die Ausführungen später ausschließlich für die TSDT.

#### 7.1.1 Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist Grundlage für das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials. Es basiert auf dem allgemeinen Arbeitssatz, der beliebige Spannungen und Kräfte mit beliebigen, jedoch zulässigen Verschiebungen und Verzerrungen verknüpft. Der allgemeine Arbeitssatz ist unabhängig vom Materialverhalten gültig und lautet (mit  $i, j = x, y, z$ ):

$$\int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{\partial V_t} t_{i0}^{(1)} u_i^{(2)} dA + \int_{\partial V_u} t_i^{(1)} u_{i0}^{(2)} dA. \quad (7.1)$$

Das Integral auf der linken Seite beschreibt dabei die Arbeit der inneren Kräfte, während das erste Integral auf der rechten Seite die Arbeit der Volumenkräfte ist. Die von den Oberflächenbelastungen geleistete Arbeit wird anhand der beiden übrigen Integrale angegeben.

Es wird ein elastischer Körper betrachtet, der aufgrund einer gegebenen Oberflächenbelastung  $t_i$  und gegebenen Volumenlasten  $f_i$  einem Spannungsfeld  $\sigma_{ij}$  unterliegt und sich zudem in einem Gleichgewichtszustand befindet. Indem der Körper infinitesimal aus diesem Zustand ausgelenkt wird, werden sogenannte virtuelle Verschiebungen  $\delta u_i$  und virtuelle Verzerrungen  $\delta \varepsilon_i$  hervorgerufen, welche unter dem Begriff Verrückungen zusammengefasst werden. Die infinitesimalen, virtuellen Verrückungen sind nicht real existent, sondern lediglich gedachte Größen, welche in Anlehnung an die geometrischen Randbedingungen potentiell möglich sein müssen. Unter der Voraussetzung, dass auf der Oberfläche

$\partial V_u$ , auf der bereits Verschiebungen vorgegeben sind, keine virtuellen Verschiebungen  $\delta u_i$  zulässig sind, lässt sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen unter einsetzen der realen Kraftgrößen  $\sigma_{ij}$ ,  $f_i$ ,  $t_i$  und der virtuellen Verrückungen  $\delta u_i$  und  $\delta \varepsilon_i$  herleiten und wie folgt formulieren (mit  $i, j = x, y, z$ ):

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{\partial V_t} t_{i0} \delta u_i dA. \quad (7.2)$$

Üblicherweise wird das Integral auf der linken Seite als innere virtuelle Arbeit  $\delta W_i$  bezeichnet, während die Integrale auf der rechten Seite zur äußeren virtuellen Arbeit  $\delta W_a$  zusammengefasst werden. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (7.2) kann aufgrund der daraus folgenden Beziehung

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (7.3)$$

vollkommen äquivalent als Gleichgewichtsbedingung betrachtet werden, welche hier lediglich über virtuelle Arbeiten formuliert wird.

### 7.1.2 Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials

Geht man bei der Betrachtung eines Körpers weiterhin von elastischem Verhalten aus, stimmt die virtuelle innere Arbeit  $\delta W_i$  mit der virtuellen Änderung des inneren Potentials  $\delta \Pi_i$  sowie die virtuelle äußere Arbeit  $\delta W_a$ , unter Berücksichtigung des entgegengesetzten Vorzeichens, mit der virtuellen Änderung des äußeren Potentials  $\delta \Pi_a$  überein:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \Pi_i, \\ \delta W_a &= \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{\partial V_t} t_{i0} \delta u_i dA = \int_V \delta U dV = -\delta \Pi_a. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Das Gesamtpotential des elastischen Körpers ergibt sich aus der Summe des inneren Potentials  $\Pi_i$  und des äußeren Potentials  $\Pi_a$ :

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a. \quad (7.5)$$

Damit folgt aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen unter Berücksichtigung von (7.5) der Zusammenhang

$$\delta \Pi = \delta(\Pi_i + \Pi_a) = 0, \quad (7.6)$$

welcher als Prinzip des virtuellen Gesamtpotentials bekannt ist. Ein elastischer Körper befindet sich demnach in einem Gleichgewichtszustand, wenn die erste Variation des Gesamtpotentials verschwindet. Aufgrund der Analogie von Variation und Differentiation wird sofort deutlich, dass die Variation des Gesamtpotentials (7.6) die Forderung nach sich zieht, dass das Gesamtpotential  $\Pi$  zur Gewährleistung des Gleichgewichts einen Extremwert annehmen muss. Diese Schlussfolgerung ist als das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials bekannt und lässt sich wie folgt formulieren:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \text{Extremum}. \quad (7.7)$$

Verhält sich der betrachtete Körper darüber hinaus sogar linear elastisch, lässt sich dessen Materialverhalten bekanntermaßen mit dem Hookesche Gesetz beschreiben. Aus dem Extremum in (7.7) wird dann ein Minimum und es kann das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials formuliert werden:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \text{Minimum}. \quad (7.8)$$

### 7.1.3 Das Ritz-Verfahren

Das Ritz-Verfahren ist bei den sogenannten kontinuierlichen Verfahren einzuordnen und geht grundlegend aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials (7.8) hervor. Es wird angenommen, dass das Gesamtpotential in Abhängigkeit der kinematischen Größen des Verschiebungsfeldes des betrachteten elastischen Körpers bekannt ist. In einem ersten Schritt werden für diese Größen Ansatzfunktionen definiert, welche den kinematischen Randbedingungen genügen und das gegebene Problem (z.B. das Plattenbeulen) möglichst genau beschreiben müssen. Geht man von den Verschiebungen  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  sowie den Biegewinkeln bzw. Neigungen der Querschnittsverwölbung  $\psi_x$  und  $\psi_y$  aus dem Verschiebungsfeld der TSDT aus, lassen sich die Ansatzfunktionen in der allgemeinen Form wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{m=M_u} \sum_{n=1}^{n=N_u} U_{mn} u_{1m}(x) u_{2n}(y), \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{m=M_v} \sum_{n=1}^{n=N_v} V_{mn} v_{1m}(x) v_{2n}(y), \\
 w_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{m=M_w} \sum_{n=1}^{n=N_w} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y), \\
 \psi_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{m=M_{\psi_x}} \sum_{n=1}^{n=N_{\psi_x}} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y), \\
 \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{m=M_{\psi_y}} \sum_{n=1}^{n=N_{\psi_y}} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y).
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Hierin sind  $m$  und  $n$  die Anzahlen der Ansatzfunktionen, welche sich aus den Ansatzkonstanten  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$ ,  $X_{mn}$ ,  $Y_{mn}$  und den Teilansatzfunktionen  $u_{1m}(x)$ ,  $u_{2n}(y)$ ,  $v_{1m}(x)$ ,  $v_{2n}(y)$ ,  $w_{1m}(x)$ ,  $w_{2n}(y)$ ,  $\psi_{x1m}(x)$ ,  $\psi_{x2n}(y)$ ,  $\psi_{y1m}(x)$ ,  $\psi_{y2n}(y)$  zusammensetzen. Während die Ansatzkonstanten das eigentliche Ziel der Berechnung mit Hilfe des Ritz-Verfahrens sind, müssen die Teilansatzfunktionen unter Berücksichtigung der genannten Anforderungen gewählt werden.

Setzt man die Ansatzfunktionen (7.9) in das Prinzip des virtuellen Gesamtpotentials (7.6) ein und berücksichtigt, dass die einzigen Größen des Potentials, die noch variiert werden können, die Ansatzkonstanten sind, dann kann das Verschwinden der ersten Variation des Gesamtpotentials  $\delta\Pi$  nur dann erfüllt werden, wenn die folgenden, als Ritzsche Gleichungen bezeichneten Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial U_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial V_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial W_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial X_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial Y_{mn}} = 0. \tag{7.10}$$

Für Probleme im Kontext einer geometrisch linearen Theorie führt (7.10) auf ein lineares Gleichungssystem, welches sich in bekannter Weise einfach lösen lässt. Somit ist der Berechnungsaufwand beim Ritz-Verfahren wesentlich geringer als bspw. bei einer Finite-Elemente-Analyse und führt bei geeigneten Ansatzfunktionen auf sehr genau Ergebnisse.

## 7.2 Energetische Lösung für Schubdeformationstheorie 3. Ordnung

Energieverfahren beruhen im Wesentlichen auf Aussagen über den Energiehaushalt des betrachteten Laminats. Ziel der analytischen Berechnung ist die Ermittlung der Beullast  $N_{xx}^0$  mit Hilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials in Verbindung mit dem Ritz-Verfahren. Hierfür ist die Betrachtung des Gesamtpotentials  $\Pi$  des jeweiligen Laminats im gebeulten Zustand erforderlich. Für die mechanischen Modelle für Steg und Flansche des I-Trägers setzt sich das Gesamtpotential  $\Pi$  aus dem inneren Potential  $\Pi_i$ , dem äußeren Potential  $\Pi_a$  sowie der in den Federn gespeicherten Energie  $\Pi_s$  zusammen:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a + \Pi_s. \quad (7.11)$$

Der Steg und die Flansche weisen elastisches Materialverhalten auf, weshalb das innere Potential  $\Pi_i$  der inneren Arbeit  $W_i$  entspricht. Unter Berücksichtigung, dass eine Änderung der Dicke  $h$  während des gesamten Vorgangs der Vorformung ausgeschlossen ist und eine Dehnung  $\varepsilon_{zz}$  in Dickenrichtung (z-Richtung) somit nicht existent ist, gilt für das innere Potential  $\Pi_i$ :

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Dabei ist weiterhin zu berücksichtigen, dass Verzerrungen  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  aus der Symmetrie des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{ij}$  hervorgehen. Setzt man in diese Formulierung das Verzerrungsfeld der TSDT ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_z \int_y \int_x \left\{ \sigma_{xx} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] \right. \\ &+ \sigma_{xx} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] \\ &+ \tau_{xy} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ &+ \tau_{xz} \left[ \psi_x - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ &+ \left. \tau_{yz} \left[ \psi_y - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right\} dx dy dz. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Nach anschließender Integration bezüglich der z-Koordinate und dem Einsetzen der Schnittkraftgrößen lässt sich das innere Potential  $\Pi_i$  wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ N_{xx}^0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy}^0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + M_{xx}^0 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_{yy}^0 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right. \\ &+ M_{xy}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} P_{xx}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} P_{yy}^0 \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ &\left. - \frac{4}{3h^2} P_{xy}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + Q_y \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + Q_x \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

$$- \frac{4}{h^2} R_y \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{4}{h^2} R_x \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \Big] dx dy. \quad (7.14)$$

An dieser Stelle ist das Konstitutivgesetz der TSDT in das innere Potential  $\Pi_i$  einzusetzen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in diesem Kapitel lediglich symmetrische, orthotrope Laminate betrachtet werden, deren Laminateinzelschichten lediglich die Winkellagen  $\theta = 0$  bzw.  $\theta = 90$  aufweisen. Aufgrund der Symmetrie ergibt sich aus (??), dass die Membransteifigkeiten  $B_{ij}$  sowie  $E_{ij}$  null werden. Wegen der Winkellagen  $\theta = 0^\circ$  bzw.  $\theta = 90^\circ$  verschwinden zudem die transformierte Steifigkeit  $\bar{C}_{45}$  sowie die transformierten reduzierten Steifigkeiten  $\bar{Q}_{16}$  und  $\bar{Q}_{26}$ , so dass die Membran- bzw. transversalen Schubsteifigkeiten  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$ ,  $D_{26}$ ,  $F_{16}$ ,  $F_{26}$ ,  $H_{16}$ ,  $H_{26}$ ,  $A_{45}$ ,  $D_{45}$ ,  $F_{45}$  ebenfalls zu null werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} A_{16} &= A_{26} = B_{ij} = D_{16} = D_{26} = E_{ij} = F_{16} \\ &= F_{26} = H_{16} = H_{26} = A_{45} = D_{45} = F_{45} = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Darüber hinaus treten keine Verschiebungen  $u_0$  und  $v_0$  der Laminate-Mittelebene bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate während des Beulvorgangs auf. Damit lässt sich das innere Potential  $\Pi_i$  schließlich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &+ 2D_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{3h^2} F_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{8}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{16}{3h^2} F_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ &- \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{8}{3h^2} F_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 - \frac{8}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ &- \frac{8}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 - \frac{16}{3h^2} F_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{66} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{16}{3h^2} F_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{16}{3h^2} F_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \frac{32}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{16}{3h^2} H_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ &+ \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &+ \frac{16}{9h^4} H_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{32}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\ &+ \frac{16}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{32}{9h^4} H_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{64}{9h^4} H_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ &+ \frac{16}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{64}{9h^4} H_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{64}{9h^4} H_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ &+ A_{44} \psi_y^2 + 2A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_y + A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \psi_x^2 + 2A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_x \\ &+ A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{h^2} D_{44} \psi_y^2 - \frac{16}{h^2} D_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_y - \frac{8}{h^2} D_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{h^2} D_{55} \psi_x^2 - \frac{16}{h^2} D_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_x - \frac{8}{h^2} D_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{16}{h^4} F_{44} \psi_y^2 \\
& + \frac{32}{h^4} F_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_y + \frac{16}{h^4} F_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{16}{h^4} F_{55} \psi_x^2 + \frac{32}{h^4} F_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_x \\
& + \frac{16}{h^4} F_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \Big] dx dy. \tag{7.16}
\end{aligned}$$

Das äußere Potential  $\Pi_a$  lautet:

$$\Pi_a = -W_a = - \int_0^b N_{xx}^0(y) u_0(y), \tag{7.17}$$

bzw.

$$\Pi_a = -\frac{1}{2} N_{xx}^0 \int_0^b \int_0^a \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx dy. \tag{7.18}$$

Aufgrund der elastischen Einspannung des Stegs und der Flansche in Form der drehelastischen Federn mit der Federsteifigkeit  $k$  wird mit Beginn des Laminatbeulens die Energie  $\Pi_s$  in den Federn gespeichert. Sie ist bei Bestimmung des Gesamtpotentials  $\Pi$  entsprechend zu berücksichtigen. Für den Steg, der an den Rändern  $y = 0$  und  $y = b$  elastisch eingespannt ist, gilt:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} k \int_0^a [\psi_y^2(y = 0) + \psi_y^2(y = b)] dx. \tag{7.19}$$

Die Flansche hingegen sind nur bei  $y = 0$  elastisch eingespannt und haben bei  $y = b$  einen freien Rand. Für die gespeicherte Federenergie gilt dann:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} k \int_0^a [\psi_y^2(y = 0)] dx. \tag{7.20}$$

Um die hier betrachteten lokalen Laminat-Beulprobleme eindeutig zu beschreiben, müssen die geometrischen sowie die physikalischen Randbedingungen betrachtet werden. Während Erstere Forderungen an die kinematischen Größen  $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$  stellen, stellen Letztere Forderungen an die am Rand vorliegenden Kraftgrößen  $N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0, M_{xx}^0, M_{yy}^0, M_{xy}^0, P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}, Q_y, Q_x, R_y, R_x$ . Die Randbedingungen für den Steg und den Flansch des I-Trägers können mit Hilfe des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials bestimmt werden. Dies erfordert das Verschwinden der ersten Variation des Gesamtpotentials  $\delta\Pi$ :

$$\delta\Pi = \delta\Pi_i + \delta\Pi_a + \delta\Pi_s = 0. \tag{7.21}$$

Für die erste Variation des inneren Potentials  $\Pi_i$  aus (7.14) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ N_{xx}^0 \delta u_{0,x} + N_{yy}^0 \delta v_{0,y} + N_{xy}^0 \delta u_{0,y} + N_{xy}^0 \delta v_{0,x} + M_{xx}^0 \delta \psi_{x,x} + M_{yy}^0 \delta \psi_{y,y} \right. \\
&+ M_{xy}^0 \delta \psi_{x,y} + M_{xy}^0 \delta \psi_{y,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xx}^0 \delta \psi_{x,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xx}^0 \delta w_{0,xx} - \frac{4}{3h^2} P_{yy}^0 \delta \psi_{y,y} \\
&- \frac{4}{3h^2} P_{yy}^0 \delta w_{0,yy} - \frac{4}{3h^2} P_{xy}^0 \delta \psi_{x,y} - \frac{4}{3h^2} P_{xy}^0 \delta \psi_{y,x} - \frac{8}{3h^2} P_{xy}^0 \delta w_{0,xy} + Q_y \delta \psi_y \\
&+ Q_y \delta w_{0,y} + Q_x \delta \psi_x + Q_x \delta w_{0,x} - \frac{4}{h^2} R_y \delta \psi_y - \frac{4}{h^2} R_y \delta w_{0,y} - \frac{4}{h^2} R_x \delta \psi_x \\
&\left. - \frac{4}{h^2} R_x \delta w_{0,x} \right] dx dy. \tag{7.22}
\end{aligned}$$

Anschließend werden alle Terme der ersten Variation des inneren Potentials  $\delta\Pi_i$ , in denen Ableitungen der kinematischen Größen  $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$  auftreten, schrittweise partiell integriert. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 \delta u_{0,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b N_{xx}^0 \delta u_0|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx,x}^0 \delta u_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{yy}^0 \delta v_{0,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a N_{yy}^0 \delta v_0|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{yy,y}^0 \delta v_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy}^0 \delta u_{0,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a N_{xy}^0 \delta u_0|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy,y}^0 \delta u_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy}^0 \delta v_{0,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b N_{xy}^0 \delta v_0|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xy,x}^0 \delta v_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xx}^0 \delta \psi_{x,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b M_{xx}^0 \delta \psi_x|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xx,x}^0 \delta \psi_x dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{yy}^0 \delta \psi_{y,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a M_{yy}^0 \delta \psi_y|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{yy,y}^0 \delta \psi_y dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_{x,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_x|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy,y}^0 \delta \psi_x dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy}^0 \delta \psi_{y,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b M_{xy}^0 \delta \psi_y|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a M_{xy,x}^0 \delta \psi_y dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xx} \delta \psi_{x,x} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^b P_{xx} \delta \psi_x|_0^a dy + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xx,x} \delta \psi_x dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xx} \delta w_{0,xx} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^b P_{xx} \delta w_{0,x}|_0^a dy + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xx,x} \delta w_{0,x} dx dy \\
&= -\frac{2}{3h^2} \int_0^b P_{xx} \delta w_{0,x}|_0^a dy + \frac{2}{3h^2} \int_0^b P_{xx} \delta w_0|_0^a dy \\
&\quad - \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xx,xx} \delta w_0 dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{yy} \delta \psi_{y,y} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^a P_{yy} \delta \psi_y|_0^b dx + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{yy,y} \delta \psi_y dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{yy} \delta w_{0,yy} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^a P_{yy} \delta w_{0,y}|_0^b dx + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{yy,y} \delta w_{0,y} dx dy \\
&= -\frac{2}{3h^2} \int_0^a P_{yy} \delta w_{0,y}|_0^b dx + \frac{2}{3h^2} \int_0^a P_{yy} \delta w_0|_0^b dx \\
&\quad - \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{yy,yy} \delta w_0 dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy} \delta \psi_{x,y} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^a P_{xy} \delta \psi_x|_0^b dx + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy,y} \delta \psi_x dx dy, \\
-\frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy} \delta \psi_{y,x} dx dy &= -\frac{2}{3h^2} \int_0^b P_{xy} \delta \psi_y|_0^a dy + \frac{2}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy,x} \delta \psi_y dx dy, \\
-\frac{4}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy} \delta w_{0,xy} dx dy &= -\frac{4}{3h^2} \int_0^b P_{xy} \delta w_{0,y}|_0^a dy + \frac{4}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy,x} \delta w_{0,y} dx dy \\
&= -\frac{4}{3h^2} P_{xy} \delta w_0|_0^a|_0^b + \frac{4}{3h^2} \int_0^a P_{xy,x} \delta w_0|_0^b dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3h^2} \int_0^b P_{xy,y} \delta w_0|_0^a dy - \frac{4}{3h^2} \int_0^b \int_0^a P_{xy,xy} \delta w_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_y \delta w_{0,y} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^a Q_y \delta w_0|_0^b dx - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_{y,y} \delta w_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_x \delta w_{0,x} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b Q_x^0 \delta w_0|_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_{x,x} \delta w_0 dx dy, \\
\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_y \delta \psi_y dx dy &, \quad \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a Q_x \delta \psi_x dx dy, \\
-\frac{2}{h^2} \int_0^b \int_0^a R_y \delta w_{0,y} dx dy &= -\frac{2}{h^2} \int_0^a R_y \delta w_0|_0^b dx + \frac{2}{h^2} \int_0^b \int_0^a R_{y,y} \delta w_0 dx dy, \\
-\frac{2}{h^2} \int_0^b \int_0^a R_x \delta w_{0,x} dx dy &= -\frac{2}{h^2} \int_0^b R_x^0 \delta w_0|_0^a dy + \frac{2}{h^2} \int_0^b \int_0^a R_{x,x} \delta w_0 dx dy, \\
-\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a R_y \delta \psi_y dx dy &, \quad -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a R_x \delta \psi_x dx dy. \tag{7.23}
\end{aligned}$$

Für die erste Variation des äußeren Potentials  $\Pi_a$  aus (7.18) sowie für die Federenergie  $\Pi_s$  aus (7.19) bzw. (7.20) ergibt sich entsprechend nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_a &= -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 \delta(w_{0,x})^2 \\
&= -\int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 w_{0,x} \delta w_{0,x} dx dy \\
&= -\int_0^b N_{xx}^0 w_{0,x} \delta w_0|_0^a dy + \int_0^b \int_0^a N_{xx}^0 w_{0,xx} \delta w_0 dx dy, \tag{7.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_s &= \frac{1}{2} k \int_0^a \{ \delta[\psi_y^2(y=0)] + \delta[\psi_y^2(y=b)] \} dx \\
&= k \int_0^a [ \psi_y(y=0) \delta \psi_y(y=0) + \psi_y(y=b) \delta \psi_y(y=b) ] dx. \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Setzt man die Ausdrücke aus (7.23), (7.24) und (7.25) in die Beziehung für das Verschwinden der ersten Variation des Gesamtpotentials (7.21) ein und sortiert diese entsprechend der relevanten Variationen  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta w_{0,x}$ ,  $\delta w_{0,y}$ ,  $\delta \psi_x$ ,  $\delta \psi_y$ , erhält man zusammenfassend folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ (N_{xx,x}^0 + N_{xy,y}^0) \delta u_0 + (N_{yy,y}^0 + N_{xy,x}^0) \delta v_0 + \left( \frac{4}{3h^2} P_{xx,xx} + \frac{4}{3h^2} P_{yy,yy} \right. \right. \\
& + \left. \frac{4}{3h^2} P_{xy,xy} + Q_{y,y} + Q_{x,x} - \frac{4}{h^2} R_{y,y} - \frac{4}{h^2} R_{x,x} - 2N_{xx}^0 w_{0,xx} \right) \delta w_0 \\
& + \left( M_{xx,x}^0 + M_{xy,y}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} - \frac{4}{3h^2} P_{xy,y} - Q_x + R_x \right) \delta \psi_x + \left( M_{yy,y}^0 \right. \\
& + \left. M_{xy,x}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} - \frac{4}{3h^2} P_{xy,x} - Q_y + R_y \right) \delta \psi_y \left. \right\} dx dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \left[ N_{xy}^0 \delta u_0 + N_{yy}^0 \delta v_0 + \left( \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} + \frac{8}{3h^2} P_{xy,x} + Q_y - \frac{4}{h^2} R_y \right) \delta w_0 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \right) \delta\psi_x + \left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) \delta\psi_y - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \delta w_{0,y} \Bigg|_0^b \\
& + \left. k\psi_y(y=0) \delta\psi_y(y=0) + k\psi_y(y=b) \delta\psi_y(y=b) \right\} dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^b \left\{ \left[ N_{xx}^0 \delta u_0 + N_{xy}^0 \delta v_0 + \left( \frac{4}{3h^2} P_{xx,x} + \frac{8}{3h^2} P_{xy,y} + Q_x - \frac{4}{h^2} R_x \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left. 2N_{xx}^0 w_{0,x} \right) \delta w_0 + \left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) \delta\psi_x + \left( M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \right) \delta\psi_y \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{4}{3h^2} P_{xx} \delta w_{0,x} \right] \Bigg|_0^a \right\} dy \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{8}{3h^2} P_{xy} \delta w_0 \right) \Bigg|_0^a \Bigg|_0^b = 0 \tag{7.26}
\end{aligned}$$

Diese Formulierung ermöglicht es nun, sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Randbedingungen zu ermitteln. Bei genauer Betrachtung von (7.26) wird deutlich, dass die Bedingung nur dann erfüllt ist, wenn für die relevanten Variationen  $\delta u_0 = 0$ ,  $\delta v_0 = 0$ ,  $\delta w_0 = 0$ ,  $\delta w_{0,x} = 0$ ,  $\delta w_{0,y} = 0$ ,  $\delta\psi_x = 0$ ,  $\delta\psi_y = 0$  gilt, oder die zugehörigen Terme null werden.

Unter Berücksichtigung, dass Verschiebungen  $u_0$  und  $v_0$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung für die gegebene Situation keine Relevanz haben, lauten die Randbedingungen für einen Steg mit zwei elastisch eingespannten Rändern bei  $y = 0$  und  $y = b$ :

$$\begin{aligned}
w_0(x=0) &= 0, & w_0(x=a) &= 0, & w_0(y=0) &= 0, & w_0(y=b) &= 0, \\
\psi_x(y=0) &= 0, & \psi_x(y=b) &= 0, & \psi_y(x=0) &= 0, & \psi_y(x=a) &= 0, \\
P_{xx}(x=0) &= 0, & P_{xx}(x=a) &= 0, & P_{yy}(y=0) &= 0, & P_{yy}(y=b) &= 0, \\
\left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) (x=0) &= 0, & \left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) (x=a) &= 0, \\
\left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) (y=0) &= k\psi_y(y=0), \\
\left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) (y=b) &= -k\psi_y(y=b). \tag{7.27}
\end{aligned}$$

Für einen Flansch mit einem elastisch eingespannten Rand bei  $y = 0$  sowie einem freien Rand bei  $y = b$  gelten dagegen folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
w_0(x=0) &= 0, & w_0(x=a) &= a, & w_0(y=0) &= 0, \\
\psi_x(y=0) &= 0, & \psi_y(x=0) &= 0, & \psi_y(x=a) &= 0, \\
P_{xx}(x=0) &= 0, & P_{xx}(x=a) &= 0, & P_{yy}(y=0) &= 0, & P_{yy}(y=b) &= 0, \\
\left( \frac{4}{3h^2} P_{yy,y} + \frac{8}{3h^2} P_{xy,x} + Q_y - \frac{4}{h^2} R_y \right) (y=b) &= 0, \\
\left( M_{xy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xy} \right) (y=b) &= 0, \\
\left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) (x=0) &= 0, & \left( M_{xx}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{xx} \right) (x=a) &= 0, \\
\left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) (y=0) &= k\psi_y(y=0), & \left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) (y=b) &= 0.
\end{aligned}$$

(7.28)

Für die analytische Berechnung der Beullast  $N_{xx}^0$  ist die Anwendung des Ritz-Verfahrens erforderlich. Dies erfordert in einem ersten Schritt die Formulierung von Ansatzfunktionen für die kinematischen Größen, welche in den Formulierungen für das innere Potential  $\Pi_i$  (Gl. (7.16)), das äußere Potential  $\Pi_a$  (Gl. (7.18)) und die Federenergie  $\Pi_s$  (Gl. (7.19) und (7.20)) signifikant sind. Es handelt sich dabei um die Verschiebung  $w_0$  der Laminat-Mittelebene in  $z$ -Richtung sowie die beiden Biegewinkel bzw. Neigungen der Querschnittsverwölbung  $\psi_x$  und  $\psi_y$  auf der Laminat-Mittelebene. Für die genannten kinematischen Größen werden zunächst folgende allgemeine Ansatzfunktionen formuliert:

$$w_0 = Ww_1(x)w_2(y), \quad \psi_x = X\psi_{x1}(x)\psi_{x2}(y), \quad \psi_y = Y\psi_{y1}(x)\psi_{y2}(y). \quad (7.29)$$

Hierin sind die Größen  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  die Ansatzkonstanten, welche bei der Anwendung des Ritz-Verfahrens üblicherweise das eigentliche Ziel der Berechnung sind, bei der Herleitung des Energieverfahrens auf der Grundlage der TSDT jedoch unbestimmt bleiben. Die Teilansatzfunktionen  $w_1(x)$ ,  $w_2(y)$ ,  $\psi_{x1}(x)$ ,  $\psi_{x2}(y)$ ,  $\psi_{y1}(x)$ ,  $\psi_{y2}(y)$  werden an späterer Stelle für das lokale Steg- bzw. das lokale Flanschbeulen separat definiert. Sie müssen die in (7.27) bzw. (7.28) genannten geometrischen bzw. kinematischen Randbedingungen erfüllen. Setzt man die allgemeinen Ansatzfunktionen (7.29) in die Formulierung des Gesamtpotentials  $\Pi$  (7.11) unter Berücksichtigung von (7.16), (7.18) sowie (7.19) bzw. (7.20) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}D_{11}X^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{x1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy + D_{12}XY \int_0^a \frac{d\psi_{x1}}{dx} \psi_{y1} dx \int_0^b \psi_{x2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy \\ & + \frac{1}{2}D_{22}Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{y2}}{dy} \right)^2 dy + \frac{1}{2}D_{66}X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{x2}}{dy} \right)^2 dy \\ & + D_{66}XY \int_0^a \psi_{x1} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2}}{dy} \psi_{y2} dy + \frac{1}{2}D_{66}Y^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{y1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy \\ & - \frac{4}{3h^2}F_{11}X^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{x1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy - \frac{4}{3h^2}F_{11}WX \int_0^a \frac{d^2w_1}{dx^2} \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy \\ & - \frac{8}{3h^2}F_{12}XY \int_0^a \frac{d\psi_{x1}}{dx} \psi_{y1} dx \int_0^b \psi_{x2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy - \frac{4}{3h^2}F_{12}WX \int_0^a w_1 \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx \int_0^b \frac{d^2w_2}{dy^2} \psi_{x2} dy \\ & - \frac{4}{3h^2}F_{12}WY \int_0^a \frac{d^2w_1}{dx^2} \psi_{y1} dx \int_0^b w_2 \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy - \frac{4}{3h^2}F_{22}Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{y2}}{dy} \right)^2 dy \\ & - \frac{4}{3h^2}F_{22}WY \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx \int_0^b \frac{d^2w_2}{dy^2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy - \frac{4}{3h^2}F_{66}X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{x2}}{dy} \right)^2 dy \\ & - \frac{8}{3h^2}F_{66}XY \int_0^a \psi_{x1} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2}}{dy} \psi_{y2} dy - \frac{4}{3h^2}F_{66}Y^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{y1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy \\ & - \frac{8}{3h^2}F_{66}WX \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \frac{d\psi_{x2}}{dy} dy - \frac{8}{3h^2}F_{66}WY \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy \\ & + \frac{8}{9h^4}H_{11}X^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{x1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy + \frac{16}{9h^4}H_{11}WX \int_0^a \frac{d^2w_1}{dx^2} \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy \\ & + \frac{8}{9h^4}H_{11}W^2 \int_0^a \left( \frac{d^2w_1}{dx^2} \right)^2 dx \int_0^b w_2^2 dy + \frac{16}{9h^4}D_{12}XY \int_0^a \frac{d\psi_{x1}}{dx} \psi_{y1} dx \int_0^b \psi_{x2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} W X \int_0^a w_1 \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx \int_0^b \frac{d^2 w_2}{dy^2} \psi_{x2} dy + \frac{16}{9h^4} H_{12} W Y \int_0^a \frac{d^2 w_1}{dx^2} \psi_{y1} dx \int_0^b w_2 \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} W^2 \int_0^a \frac{d^2 w_1}{dx^2} w_1 dx \int_0^b w_2 \frac{d^2 w_2}{dy^2} dy + \frac{8}{9h^4} H_{22} Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{y2}}{dy} \right)^2 dy \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{22} W Y \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx \int_0^b \frac{d^2 w_2}{dy^2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy + \frac{8}{9h^4} H_{22} W^2 \int_0^a w_1^2 dx \int_0^b \left( \frac{d^2 w_2}{dy^2} \right)^2 dy \\
& + \frac{8}{9h^4} H_{66} X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \left( \frac{d\psi_{x2}}{dy} \right)^2 dy + \frac{16}{9h^4} H_{66} X Y \int_0^a \psi_{x1} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2}}{dy} \psi_{y2} dy \\
& + \frac{32}{9h^4} H_{66} W X \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \frac{d\psi_{x2}}{dy} dy + \frac{8}{9h^4} H_{66} Y^2 \int_0^a \left( \frac{d\psi_{y1}}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy \\
& + \frac{32}{9h^4} H_{66} W Y \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy + \frac{32}{9h^4} H_{66} W^2 \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx \int_0^b \left( \frac{dw_2}{dy} \right)^2 dy \\
& + \frac{1}{2} A_{44} Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy + A_{44} W Y \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy \\
& + \frac{1}{2} A_{44} W^2 \int_0^a w_1^2 dx \int_0^b \left( \frac{dw_2}{dy} \right)^2 dy + \frac{1}{2} A_{55} X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy \\
& + A_{55} W X \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy + \frac{1}{2} A_{55} W^2 \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx \int_0^b w_2^2 dy \\
& - \frac{4}{h^2} D_{44} Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy - \frac{8}{h^2} D_{44} W Y \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy \\
& - \frac{4}{h^2} D_{44} W^2 \int_0^a w_1^2 dx \int_0^b \left( \frac{dw_2}{dy} \right)^2 dy - \frac{4}{h^2} D_{55} X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy \\
& - \frac{8}{h^2} D_{55} W X \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy - \frac{4}{h^2} D_{55} W^2 \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx \int_0^b w_2^2 dy \\
& + \frac{8}{h^4} F_{44} Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx \int_0^b \psi_{y2}^2 dy + \frac{16}{h^4} F_{44} W Y \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy \\
& + \frac{8}{h^4} F_{44} W^2 \int_0^a w_1^2 dx \int_0^b \left( \frac{dw_2}{dy} \right)^2 dy + \frac{8}{h^4} F_{55} X^2 \int_0^a \psi_{x1}^2 dx \int_0^b \psi_{x2}^2 dy \\
& + \frac{16}{h^4} F_{55} W X \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy + \frac{8}{h^4} F_{55} W^2 \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx \int_0^b w_2^2 dy \\
& - \frac{1}{2} N_{xx}^0 W^2 \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 \int_0^b w_2^2 dy \\
& + \frac{1}{2} k Y^2 \int_0^a \psi_{y1}^2 dx [\psi_{y2}^2(y=0) + \psi_{y2}^2(y=b)].
\end{aligned}$$

(7.30)

Diese Formulierung ist in erster Linie für das lokale Stegbeulen gültig. Beim lokalen Flanschbeulen ist zu berücksichtigen, dass der Flansch bei  $y = b$  einen freien Rand hat und der Term  $\psi_y^2(y = b)$  entsprechend der Federenergie  $\Pi_s$  des Flansches (7.20) entfällt. Im Hinblick auf die weitere Herleitung des Energieverfahrens ist es an dieser Stelle sinnvoll, für die Integrale aus (7.30) Abkürzungen einzuführen. Diese können dann nach der separaten Definition der Teilansatzfunktionen  $w_1(x)$ ,  $w_2(y)$ ,  $\psi_{x1}(x)$ ,  $\psi_{x2}(y)$ ,  $\psi_{y1}(x)$ ,  $\psi_{y2}(y)$

für Steg und Flansch gelöst werden. Folgenden Abkürzungen werden eingeführt:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^a \left( \frac{d\psi_{x1}}{dx} \right)^2 dx, & I_2 &= \int_0^a \frac{d\psi_{x1}}{dx} \psi_{y1} dx, & I_3 &= \int_0^a \psi_{y1}^2 dx, \\
I_4 &= \int_0^a \psi_{x1}^2 dx, & I_5 &= \int_0^a \psi_{x1} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx, & I_6 &= \int_0^a \left( \frac{d\psi_{y1}}{dx} \right)^2 dx, \\
I_7 &= \int_0^a \frac{d^2 w_1}{dx^2} \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx, & I_8 &= \int_0^a w_1 \frac{d\psi_{x1}}{dx} dx, & I_9 &= \int_0^a \frac{d^2 w_1}{dx^2} \psi_{y1} dx, \\
I_{10} &= \int_0^a w_1 \psi_{y1} dx, & I_{11} &= \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \psi_{x1} dx, & I_{12} &= \int_0^a \frac{dw_1}{dx} \frac{d\psi_{y1}}{dx} dx, \\
I_{13} &= \int_0^a \left( \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 dx, & I_{14} &= \int_0^a \frac{d^2 w_1}{dx^2} w_1 dx, & I_{15} &= \int_0^a w_1^2 dx, \\
I_{16} &= \int_0^a \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx, \\
J_1 &= \int_0^b \psi_{x2}^2 dy, & J_2 &= \int_0^b \psi_{x2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy, & J_3 &= \int_0^b \left( \frac{d\psi_{y2}}{dy} \right)^2 dy, \\
J_4 &= \int_0^b \left( \frac{d\psi_{x2}}{dy} \right)^2 dy, & J_5 &= \int_0^b \frac{d\psi_{x2}}{dy} \psi_{y2} dy, & J_6 &= \int_0^b \psi_{y2}^2 dy, \\
J_7 &= \int_0^b w_2 \psi_{x2} dy, & J_8 &= \int_0^b \frac{d^2 w_2}{dy^2} \psi_{x2} dy, & J_9 &= \int_0^b w_2 \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy, \\
J_{10} &= \int_0^b \frac{d^2 w_2}{dy^2} \frac{d\psi_{y2}}{dy} dy, & J_{11} &= \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \frac{d\psi_{x2}}{dy} dy, \\
J_{12} &= \int_0^b \frac{dw_2}{dy} \psi_{y2} dy, \\
J_{13} &= \int_0^b w_2^2 dy, & J_{14} &= \int_0^b w_2 \frac{d^2 w_2}{dy^2} dy, & J_{15} &= \int_0^b \left( \frac{d^2 w_2}{dy^2} \right)^2 dy, \\
J_{16} &= \int_0^b \left( \frac{dw_2}{dy} \right)^2, & C_{1rot} &= \psi_{y2}^2(y=0), & C_{2rot} &= \psi_{y2}^2(y=b).
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Hierin gilt für lokales Flanschbeulen aus den bereits genannten Gründen  $C_{2rot} = 0$ . Setzt man die Abkürzungen aus (7.31) in die Formulierung für das Gesamtpotential (7.30) ein, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} D_{11} X^2 I_1 J_1 + D_{12} XY I_2 J_2 + \frac{1}{2} D_{22} Y^2 I_3 J_3 + \frac{1}{2} D_{66} X^2 I_4 J_4 + D_{66} XY I_5 J_5 \\
&+ \frac{1}{2} D_{66} Y^2 I_6 J_6 - \frac{4}{3h^2} F_{11} X^2 I_1 J_1 - \frac{4}{3h^2} F_{11} WX I_7 J_7 - \frac{8}{3h^2} F_{12} XY I_2 J_2 \\
&- \frac{4}{3h^2} F_{12} WX I_8 J_8 - \frac{4}{3h^2} F_{12} WY I_9 J_9 - \frac{4}{3h^2} F_{22} Y^2 I_3 J_3 - \frac{4}{3h^2} F_{22} WY I_{10} J_{10} \\
&- \frac{4}{3h^2} F_{66} X^2 I_4 J_4 - \frac{8}{3h^2} F_{66} XY I_5 J_5 - \frac{4}{3h^2} F_{66} Y^2 I_6 J_6 - \frac{8}{3h^2} F_{66} WX I_{11} J_{11} \\
&- \frac{8}{3h^2} F_{66} WY I_{12} J_{12} + \frac{8}{9h^4} H_{11} X^2 I_1 J_1 + \frac{16}{9h^4} H_{11} WX I_7 J_7 + \frac{8}{9h^4} H_{11} W^2 I_{13} J_{13} \\
&+ \frac{16}{9h^4} H_{12} XY I_2 J_2 + \frac{16}{9h^4} H_{12} WX I_8 J_8 + \frac{16}{9h^4} H_{12} WY I_9 J_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} W^2 I_{14} J_{14} + \frac{8}{9h^4} H_{22} Y^2 I_3 J_3 + \frac{16}{9h^4} H_{22} WY I_{10} J_{10} + \frac{8}{9h^4} H_{22} W^2 I_{15} J_{15} \\
& + \frac{8}{9h^4} H_{66} X^2 I_4 J_4 + \frac{16}{9h^4} H_{66} XY I_5 J_5 + \frac{32}{9h^4} H_{66} WX I_{11} J_{11} + \frac{8}{9h^4} H_{66} Y^2 I_6 J_6 \\
& + \frac{8}{9h^4} H_{66} Y^2 I_6 J_6 + \frac{32}{9h^4} H_{66} WY I_{12} J_{12} + \frac{32}{9h^4} H_{66} W^2 I_{16} J_{16} + \frac{1}{2} A_{44} Y^2 I_3 J_6 \\
& + A_{44} WY I_{10} J_{12} + \frac{1}{2} A_{44} W^2 I_{15} J_{16} + \frac{1}{2} A_{55} X^2 I_4 J_1 + A_{55} WX I_{11} J_7 \\
& + \frac{1}{2} A_{55} W^2 I_{16} J_{13} - \frac{4}{h^2} D_{44} Y^2 I_3 J_6 - \frac{8}{h^2} D_{44} WY I_{10} J_{12} - \frac{4}{h^2} D_{44} W^2 I_{15} J_{16} \\
& - \frac{4}{h^2} D_{55} X^2 I_4 J_1 - \frac{8}{h^2} D_{55} WX I_{11} J_7 - \frac{4}{h^2} D_{55} W^2 I_{16} J_{13} + \frac{8}{h^4} F_{44} Y^2 I_3 J_6 \\
& + \frac{16}{h^4} F_{44} WY I_{10} J_{12} + \frac{8}{h^4} F_{44} W^2 I_{15} J_{16} + \frac{8}{h^4} F_{55} X^2 I_4 J_1 + \frac{16}{h^4} F_{55} WX I_{11} J_7 \\
& + \frac{8}{h^4} F_{55} W^2 I_{16} J_{13} - \frac{1}{2} N_{xx}^0 W^2 I_{16} J_{13} + \frac{1}{2} k Y^2 I_3 (C_{1rot} + C_{2rot}). \tag{7.32}
\end{aligned}$$

Der Gleichgewichtszustand, den der Steg bzw. der Flansch beim (lokalen) Beulen einnimmt, tritt dann ein, wenn das Gesamtpotential  $\Pi$  entsprechend (7.8) in ein Minimum übergeht. Dies ist genau dann der Fall, wenn die erste Variation des Gesamtpotentials  $\delta\Pi$  entsprechend (7.6) null wird. Unter Berücksichtigung, dass die einzigen Größen des Potentials, die noch variiert werden können, die Ansatzkonstanten  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  sind, kann das Verschwinden der ersten Variation des Gesamtpotentials  $\delta\Pi$  nur dann erfüllt werden, wenn die folgenden Ritzschen Gleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial W} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial Y} = 0. \tag{7.33}$$

Die in (7.33) formulierten Beulbedingungen führen zu folgendem homogenen linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi}{\partial W} & = \left( \frac{16}{9h^4} H_{11} I_{13} J_{13} + \frac{32}{9h^4} H_{12} I_{14} J_{14} + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_{15} J_{15} + \frac{64}{9h^4} H_{66} I_{16} J_{16} \right. \\
& + A_{44} I_{15} J_{16} + A_{55} I_{16} J_{13} - \frac{8}{h^2} D_{44} I_{15} J_{16} - \frac{8}{h^2} D_{55} I_{16} J_{13} + \frac{16}{h^4} F_{44} I_{15} J_{16} \\
& \left. + \frac{16}{h^4} F_{55} I_{16} J_{13} - N_{xx}^0 I_{16} J_{13} \right) W \\
& + \left( -\frac{4}{3h^2} F_{11} I_7 J_7 - \frac{4}{3h^2} F_{12} I_8 J_8 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{11} J_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11} I_7 J_7 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_8 J_8 + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{11} J_{11} + A_{55} I_{11} J_7 - \frac{8}{h^2} D_{55} I_{11} J_7 \\
& \left. + \frac{16}{h^4} F_{55} I_{11} J_7 \right) X \\
& + \left( -\frac{4}{3h^2} F_{12} I_9 J_9 - \frac{4}{3h^2} F_{22} I_{10} J_{10} - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{12} J_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_9 J_9 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_{10} J_{10} + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{12} J_{12} + A_{44} I_{10} J_{12} - \frac{8}{h^2} D_{44} I_{10} J_{12} \\
& \left. + \frac{16}{h^4} F_{44} I_{10} J_{12} \right) Y = 0, \\
\frac{\partial\Pi}{\partial X} & = \left( -\frac{4}{3h^2} F_{11} I_7 J_7 - \frac{4}{3h^2} F_{12} I_8 J_8 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{11} J_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11} I_7 J_7 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_8 J_8 + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{11} J_{11} + A_{55} I_{11} J_7 - \frac{8}{h^2} D_{55} I_{11} J_7 \\
& + \frac{16}{h^4} F_{55} I_{11} J_7 \Big) W \\
& + \left( D_{11} I_1 J_1 + D_{66} I_4 J_4 - \frac{8}{3h^2} F_{11} I_1 J_1 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_4 J_4 + \frac{16}{9h^4} H_{11} I_1 J_1 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} I_4 J_4 + A_{55} I_4 J_1 - \frac{8}{h^2} D_{55} I_4 J_1 + \frac{16}{h^4} F_{55} I_4 J_1 \Big) X \\
& + \left( D_{12} I_2 J_2 + D_{66} I_5 J_5 - \frac{8}{3h^2} F_{12} I_2 J_2 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_5 J_5 + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_2 J_2 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} I_5 J_5 \Big) Y = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial Y} & = \left( -\frac{4}{3h^2} F_{12} I_9 J_9 - \frac{4}{3h^2} F_{22} I_{10} J_{10} - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{12} J_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_9 J_9 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_{10} J_{10} + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{12} J_{12} + A_{44} I_{10} J_{12} - \frac{8}{h^2} D_{44} I_{10} J_{12} \\
& + \frac{16}{h^4} F_{44} I_{10} J_{12} \Big) W \\
& + \left( D_{12} I_2 J_2 + D_{66} I_5 J_5 - \frac{8}{3h^2} F_{12} I_2 J_2 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_5 J_5 + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_2 J_2 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} I_5 J_5 \Big) X \\
& + \left( D_{22} I_3 J_3 + D_{66} I_6 J_6 - \frac{8}{3h^2} F_{22} I_3 J_3 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_6 J_6 + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_3 J_3 \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} I_6 J_6 + A_{44} I_3 J_6 - \frac{8}{h^2} D_{44} I_3 J_6 + \frac{16}{h^4} F_{44} I_3 J_6 \\
& + k I_3 (C_{1rot} + C_{2rot}) \Big) Y = 0. \tag{7.34}
\end{aligned}$$

Die Formulierung (7.34) lässt sich vereinfacht in Vektor-Matrix-Schreibweise darstellen, wenn die folgenden Abkürzungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} & = \frac{16}{9h^4} H_{11} I_{13} J_{13} + \frac{32}{9h^4} H_{12} I_{14} J_{14} + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_{15} J_{15} + \frac{64}{9h^4} H_{66} I_{16} J_{16} + A_{44} I_{15} J_{16} \\
& + A_{55} I_{16} J_{13} - \frac{8}{h^2} D_{44} I_{15} J_{16} - \frac{8}{h^2} D_{55} I_{16} J_{13} + \frac{16}{h^4} F_{44} I_{15} J_{16} + \frac{16}{h^4} F_{55} I_{16} J_{13}, \\
\bar{\lambda}_{11} & = I_{16} J_{13}, \\
\lambda_{12} & = -\frac{4}{3h^2} F_{11} I_7 J_7 - \frac{4}{3h^2} F_{12} I_8 J_8 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{11} J_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11} I_7 J_7 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_8 J_8 + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{11} J_{11} + A_{55} I_{11} J_7 - \frac{8}{h^2} D_{55} I_{11} J_7 + \frac{16}{h^4} F_{55} I_{11} J_7, \\
\lambda_{13} & = -\frac{4}{3h^2} F_{12} I_9 J_9 - \frac{4}{3h^2} F_{22} I_{10} J_{10} - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_{12} J_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{12} I_9 J_9 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{22} I_{10} J_{10} + \frac{32}{9h^4} H_{66} I_{12} J_{12} + A_{44} I_{10} J_{12} - \frac{8}{h^2} D_{44} I_{10} J_{12} + \frac{16}{h^4} F_{44} I_{10} J_{12}, \\
\lambda_{22} & = D_{11} I_1 J_1 + D_{66} I_4 J_4 - \frac{8}{3h^2} F_{11} I_1 J_1 - \frac{8}{3h^2} F_{66} I_4 J_4 + \frac{16}{9h^4} H_{11} I_1 J_1 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} I_4 J_4 + A_{55} I_4 J_1 - \frac{8}{h^2} D_{55} I_4 J_1 + \frac{16}{h^4} F_{55} I_4 J_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{23} &= D_{12}I_2J_2 + D_{66}I_5J_5 - \frac{8}{3h^2}F_{12}I_2J_2 - \frac{8}{3h^2}F_{66}I_5J_5 + \frac{16}{9h^4}H_{12}I_2J_2 \\
&+ \frac{16}{9h^4}H_{66}I_5J_5, \\
\lambda_{33} &= D_{22}I_3J_3 + D_{66}I_6J_6 - \frac{8}{3h^2}F_{22}I_3J_3 - \frac{8}{3h^2}F_{66}I_6J_6 + \frac{16}{9h^4}H_{22}I_3J_3 \\
&+ \frac{16}{9h^4}H_{66}I_6J_6 + A_{44}I_3J_6 - \frac{8}{h^2}D_{44}I_3J_6 + \frac{16}{h^4}F_{44}I_3J_6 + kI_3(C_{1rot} + C_{2rot}).
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Das homogene lineare Gleichungssystem kann dann wie folgt formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} - N_{xx}^0 \bar{\lambda}_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.36}$$

Die triviale Lösung  $W = 0$ ,  $X = 0$ ,  $Y = 0$  ist für die analytische Berechnung der Beullast  $N_{xx}^0$  uninteressant. Die Ansatzkonstanten bleiben weiterhin unbestimmt. Um das homogene lineare Gleichungssystem dennoch zu lösen, muss die Koeffizientendeterminante des so entstandenen Gleichungssystems verschwinden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{11} - N_{xx}^0 \bar{\lambda}_{11})(\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{23}) - \lambda_{12}(\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{13}) \\
&+ \lambda_{13}(\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{22}\lambda_{13}) = 0.
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Die Formulierung (7.37) lässt sich so umformen, dass schließlich die gesuchte Beullast  $N_{xx}^0$  berechnet werden kann:

$$N_{xx}^0 = \frac{\lambda_{11}(\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{23}) - \lambda_{12}(\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{13}) + \lambda_{13}(\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{22}\lambda_{13})}{\bar{\lambda}_{11}(\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{23})}. \tag{7.38}$$

Es handelt sich bei (7.38) um die vollständige geschlossene Lösung zur analytischen Berechnung der Beullastlast  $N_{xx}^0$  von symmetrischen, orthotropen Laminaten, hergeleitet aus der Betrachtung des Energiehaushalts auf Grundlage der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy. Im Folgenden werden nun die Teilansatzfunktionen  $w_1(x)$ ,  $w_2(y)$ ,  $\psi_{x1}(x)$ ,  $\psi_{x2}(y)$ ,  $\psi_{y1}(x)$ ,  $\psi_{y2}(y)$  für die hier betrachteten lokalen Laminat-Beulprobleme für Steg und Flansch definiert.

Für das lokale Stegbeulen werden folgende Teilansatzfunktionen angenommen:

$$\begin{aligned}
w_0 &= Ww_1(x)w_2(y) \\
&= W \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1 - \beta) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{1}{2}\beta \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\right) \right], \\
\psi_x &= X\psi_{x1}(x)\psi_{x2}(y) \\
&= X \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1 - \beta) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{1}{2}\beta \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\right) \right], \\
\psi_y &= Y\psi_{y1}(x)\psi_{y2}(y) \\
&= Y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1 - \beta) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right].
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Während die Teilansatzfunktionen  $w_1(x)$  die Bedingung erfüllt, dass die Verschiebung  $w_0$  an den Rändern bei  $x = 0$  und  $x = a$  verschwindet, kann  $w_2(y)$  an den Rändern bei  $y = 0$

und  $y = b$  verschiedene Zustände abbilden. Aufgrund der elastischen Einspannung durch die drehelastischen Federn mit der Federsteifigkeit  $k$  sind theoretisch zwei Extremzustände möglich, zwischen denen die Teilansatzfunktion interpolieren muss. Der eine Zustand beschreibt eine gelenkige Lagerung, wie sie an den Rändern bei  $x = 0$  und  $x = a$  vorliegt. Für  $k = 0$  kann der Steg an den Rändern frei um die  $x$ -Achse rotieren. Für  $k \rightarrow \infty$  wird hingegen ein Zustand erreicht, der eine feste Einspannung darstellt. Somit hätte der Steg an den Rändern keinen Freiheitsgrad mehr. Die Interpolation zwischen den beiden Extremzuständen gelingt mit Hilfe des Faktors  $\beta$ , dessen Ermittlung an späterer Stelle kurz erläutert wird.

Die Neigung  $\psi_x$  der Querschnittsverwölbung auf der Laminat-Mittelebenen entlang der  $x$ -Achse, beschrieben durch eine Rotation um die  $y$ -Achse, wird durch die Teilansatzfunktionen  $\psi_{x1}(x)$  und  $\psi_{x2}(y)$  abgebildet. An den gelenkig gelagerten Rändern bei  $x = 0$  und  $x = a$  kann der Steg frei um die  $y$ -Achse rotieren. Mit  $\psi_{x1}(x)$  wird gewährleistet, dass  $\psi_x$  dort den Wert 1 annimmt. An den elastisch gelagerten Rändern bei  $y = 0$  und  $y = b$  ist  $\psi_{x2}(y)$  entsprechend der Teilansatzfunktion  $w_2(y)$  in der Lage mit einer geeigneten Interpolation von  $k$  bzw.  $\beta$  zwischen einer elastischen und einer festen Einspannung zu variieren. Für die Neigung  $\psi_y$  der Querschnittsverwölbung auf der Laminat-Mittelebene entlang der  $y$ -Achse, beschrieben durch eine Rotation um die  $x$ -Achse, können die Teilansatzfunktionen  $\psi_{y1}(x)$  und  $\psi_{y2}(y)$  in analoger Weise erläutert werden. Es ist dabei zu beachten, dass  $\psi_{y1}(x)$  an den Rändern bei  $x = 0$  und  $x = a$  den Wert 0 annimmt, da dort eine Rotation um die  $y$ -Achse aufgrund der Einspannung nicht möglich ist. Die Teilansatzfunktion  $\psi_{y2}(y)$  variiert wiederum in bekannter Weise zwischen den beiden beschriebenen Extremzuständen der Einspannung. Die Größe  $m$ , welche in den Teilansatzfunktionen  $w_1(x)$ ,  $\psi_{x1}(x)$ ,  $\psi_{y1}(x)$  vorkommt, beschreibt die grundsätzlich zunächst unbekannte Anzahl der Halbwellen, welche beim Vorgang des Laminat-Beulens auftreten und die einzelnen Beulmoden charakterisieren.

Setzt man die gewählten Ansatzfunktionen (7.39) in die Abkürzungen (7.31) ein, so ergibt sich für das lokale Stegbeulen:

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_6 = -I_9 = I_{12} = -I_{14} = I_{16} = \frac{m^2\pi^2}{2a}, & -I_2 = I_5 = -I_8 = I_{11} &= \frac{m\pi}{2}, \\
I_3 &= I_4 = I_{10} = I_{15} = \frac{a}{2}, & I_7 &= \frac{m^3\pi^3}{2a^2}, & I_{13} &= \frac{m^4\pi^4}{2a^3}, \\
J_1 &= J_7 = J_{13} = \frac{b(64\beta - 64\beta^2 + 12\pi - 24\pi\beta + 21\pi\beta^2)}{24\pi}, \\
J_2 &= -J_5 = J_9 = -J_{12} = -\frac{8}{3}\beta + \frac{8}{3}\beta^2 - \frac{1}{2}\pi + \pi\beta - \pi\beta^2, \\
J_3 &= \frac{\pi(16\beta - 16\beta^2 + 3\pi - 6\pi\beta + 15\pi\beta^2)}{6b}, \\
J_4 &= -J_8 = J_{11} = -J_{14} = J_{16} = \frac{\pi(16\beta - 16\beta^2 + 3\pi - 6\pi\beta + 6\pi\beta^2)}{6b}, \\
J_6 &= \frac{b(16\beta - 16\beta^2 + 3\pi - 6\pi\beta + 6\pi\beta^2)}{6\pi}, \\
J_{10} &= \frac{\pi^2(16\beta - 16\beta^2 + 3\pi - 6\pi\beta + 15\pi\beta^2)}{6b^2}, \\
J_{15} &= \frac{\pi^3(16\beta - 16\beta^2 + 3\pi - 6\pi\beta + 15\pi\beta^2)}{6b^3}, & C_{1rot} = C_{2rot} &= (1 - \beta)^2. \quad (7.40)
\end{aligned}$$

Für das lokale Flanschbeulen haben sich die folgenden Teilansatzfunktionen als zweckmäßig bewährt:

$$\begin{aligned}
w_0 &= W w_1(x) w_2(y) \\
&= W \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1-\beta) \frac{y}{b} + \beta \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \right) \right], \\
\psi_x &= X \psi_{x1}(x) \psi_{x2}(y) \\
&= X \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1-\beta) \frac{y}{b} + \beta \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \right) \right], \\
\psi_y &= Y \psi_{y1}(x) \psi_{y2}(y) \\
&= Y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ (1-\beta) \frac{1}{2} + \beta \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \right].
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Aufgrund der Analogie zu den Teilansatzfunktionen des lokalen Stegbeulens wird an dieser Stelle auf eine detaillierte Erläuterung von (7.41) verzichtet. Hingewiesen sei allerdings auf die Tatsache, dass sich die Teilansatzfunktionen von lokalem Steg- und Flanschbeulen nur deshalb unterscheiden, weil der Flansch bei der Koordinate  $y = b$  einen freien Rand hat und sich dort somit anders verhält als der Steg mit einer elastischen Einspannung. Unter Einsetzen der gewählten Ansatzfunktionen (7.41) in die Abkürzungen (7.31) folgt für das lokale Flanschbeulen:

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_6 = -I_9 = I_{12} = -I_{14} = I_{16} = \frac{m^2 \pi^2}{2a}, \quad -I_2 = I_5 = -I_8 = I_{11} = \frac{m\pi}{2}, \\
I_3 &= I_4 = I_{10} = I_{15} = \frac{a}{2}, \quad I_7 = \frac{m^3 \pi^3}{2a^2}, \quad I_{13} = \frac{m^4 \pi^4}{2a^3}, \\
J_1 &= J_7 = J_{13} = \frac{1}{6} b \left( \frac{48\beta - 48\beta^2 + 5\pi^2 \beta^2 + 2\pi^2 \beta + 2\pi^2 - 24\pi\beta}{\pi^2} \right), \\
J_2 &= J_9 = -\frac{1}{4} \beta \left( \frac{8 - 8\beta + \pi^2 \beta - 4\pi}{\pi} \right), \quad J_3 = \frac{1}{8} \left( \frac{\pi^2 \beta^2}{b} \right), \\
J_4 &= J_{11} = J_{16} = \frac{1}{8} \left( \frac{-8\beta^2 + 8 + \pi^2 \beta^2}{b} \right), \\
J_5 &= J_{12} = \frac{1}{4} \left( \frac{8\beta - 8\beta^2 + 2\pi - 2\pi\beta + \pi^2 \beta^2}{\pi} \right), \\
J_6 &= \frac{1}{4} b \left( \frac{8\beta - 8\beta^2 + \pi + 3\pi\beta^2 - 2\pi\beta}{\pi} \right), \quad J_8 = J_{14} = -\frac{1}{8} \beta \left( \frac{8 - 8\beta + \pi^2 \beta - 4\pi}{b} \right), \\
J_{10} &= \frac{1}{16} \left( \frac{\pi^3 \beta^2}{b^2} \right), \quad J_{15} = \frac{1}{32} \left( \frac{\pi^4 \beta^2}{b^3} \right), \quad C_{1rot} = \frac{1}{4} (1-\beta)^2.
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Der Faktor  $\beta$  ermöglicht wie bereits erwähnt die Interpolation zwischen den beiden Extremzuständen, welche durch die Einspannung mit einer drehelastischen Feder der Federsteifigkeiten  $k$  realisierbar sind. Um den Faktor  $\beta$  zu bestimmen, betrachtet man unter Berücksichtigung, dass  $P_{yy}(y=0) = 0$  gilt, die Formulierung

$$\left( M_{yy}^0 - \frac{4}{3h^2} P_{yy} \right) (y=0) = k \psi_y(y=0) \tag{7.43}$$

aus den Randbedingungen für den Steg (7.27) bzw. den Flansch (7.28). Setzt man in (7.43) die konstitutive Gleichung für ein symmetrisches, orthotropes Laminat sowie die

Ansatzfunktionen für lokales Steg- (7.39) bzw. Flanschbeulen (7.41) ein, so erhält man nach einigen Umformungen folgende Formulierung für den Faktor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{kY}{\frac{2\pi}{b}D_{22}Y - \frac{8\pi}{3bh^2}F_{22}Y - \frac{8\pi^2}{3b^2h^2}F_{22}W}. \quad (7.44)$$

Es ergibt sich das Problem, dass in (7.44) die Ansatzkonstanten  $W$  und  $Y$  auftauchen. Diese sind nach wie vor unbestimmt und können weder substituiert noch eliminiert werden. Die quantitative Bestimmung von  $\beta$  ist somit nicht möglich. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Formulierung für  $\beta$  aus der Herleitung des Energieverfahrens auf Grundlage der FSDT nach [136] verwendet. Sie lautet:

$$\beta = \frac{kb}{2D_{22}\pi + kb}. \quad (7.45)$$

Diese Formulierung ist sowohl für das lokale Steg- als auch das lokale Flanschbeulen gültig. Der Faktor  $\beta$  nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Für eine gelenkige Lagerung muss für die Federsteifigkeit  $k = 0$  gelten. Der Faktor  $\beta$  hat dann ebenfalls den Wert 0. Für eine feste Einspannung geht die Federsteifigkeit gegen unendlich:  $k \rightarrow \infty$ . Der Faktor  $\beta$  trägt dann den Wert 1.

In diesem Kapitel soll die vollständige, geschlossene Lösung des neu entwickelten, energiebasierten Verfahrens zur analytischen Berechnung des Beulverhaltens auf Grundlage der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung nach Reddy angewendet werden. Es werden für verschiedene I-Träger Beulkurven berechnet, welche Aussagen über das Stabilitätsverhalten in Form von lokalem Steg- und Flanschbeulen zulassen. Die Ergebnisse werden mit den entsprechenden Ergebnissen der energiebasierten Verfahren auf der Grundlage der CLPT und der FSDT verglichen. Für die CLPT sei auf die Ausführungen in [100] sowie für die FSDT auf die Erläuterungen in [136] verwiesen.

Die Beulkurven der TSDT ergeben sich aus der Berechnung der Beullast  $N_{xx}^0$ , welche mit Hilfe der vollständigen, geschlossenen Lösung (7.38) erfolgt. Setzt man in (7.35) die unter Einsetzen der Ansatzfunktionen für Steg und Flansch ausgerechneten Abkürzungen (7.40) bzw. (7.42) ein, so ergibt sich für eine konstante Höhe  $b_s$  des Stegs bzw. Breite  $b_f$  des Flansches eine Beullast  $N_{xx}^0$ , welche ausschließlich von der Variation der Länge  $a$  des Trägers sowie der Halbwellenzahl  $m$  abhängt. Es wird für jede Länge  $a$  eine minimale Beullast  $N_{xx}^0$  berechnet. Trägt man in einem Diagramm Letztere über Erstere auf, so ergibt sich die gesuchte Beulkurve des betrachteten I-Trägers.

### 7.3 I-Träger eines Hallenrahmens

Es werden drei Konfigurationen eines I-Trägers betrachtet, die Kapitel 4 entnommen sind. Die betrachteten Konfigurationen unterscheiden sich im Wesentlichen durch den Lagenaufbau und den geometrischen Abmessungen der Flansche, während sich beim verwendeten Steg nur die Breite bzw. Höhe  $b_s$  ändert.

Bei der Betrachtung der Laminat-Codes fällt auf, dass es sich bei den Stegen und Flanschen um symmetrische, quasi-isotrope Laminare handelt. Das in diesem Kapitel hergeleitete energiebasierte Verfahren auf Grundlage der TSDT sowie die in der Literatur beschriebenen Energieverfahren auf Grundlage der CLPT und FSDT sind jedoch ausschließlich auf symmetrische, orthotrope Laminare anzuwenden. Um diesen Umstand zu

umgehen, werden die nicht-orthotropen Einträge der Steifigkeitsmatrix zu null gesetzt. Die Berechnung der Federsteifigkeiten  $k$  für Steg und Flansch nach (??) bzw. (??) ergibt für alle drei I-Träger, dass der Steg ausschlaggebend für den Beginn des lokalen Beulens ist.

In den Abbildungen 7.1 bis 7.3 sind für die drei Konfigurationen des I-Trägers jeweils die Beulkurven der Energieverfahren auf Grundlage der drei Laminattheorien im Vergleich dargestellt. Aufgetragen ist dabei die Beullast  $N_{xx}^0$  in N/mm über der Länge  $a$  in mm. Dargestellt ist der Bereich von  $a = 0$  mm bis  $a = 4000$  mm. Für die I-Träger 1 bis 3

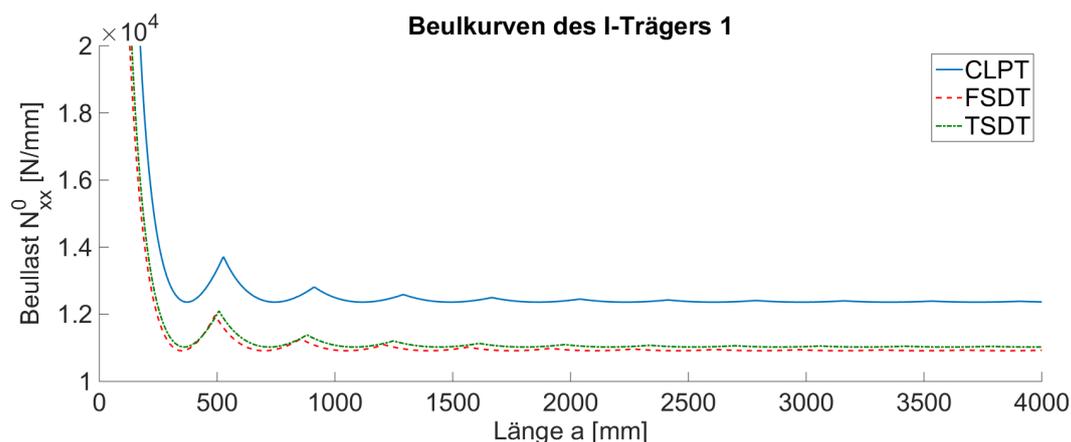


Abb. 7.1: Beulkurven des I-Trägers 1

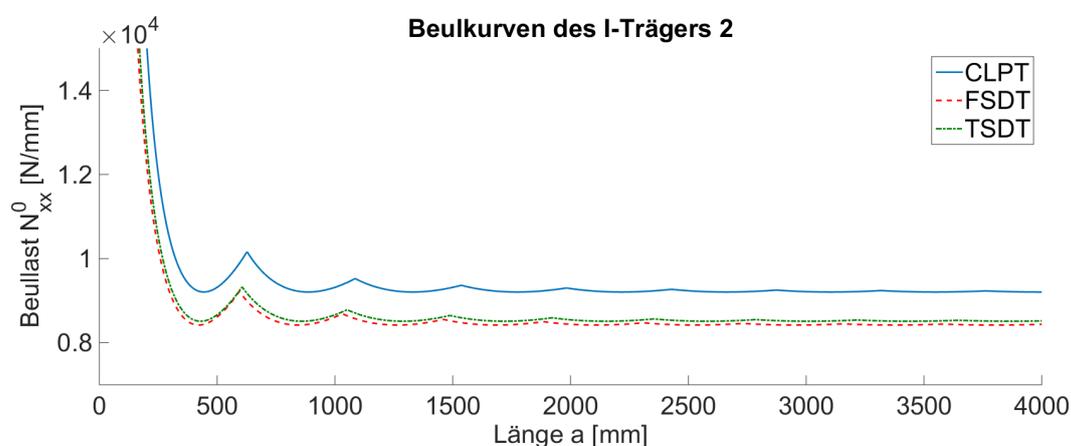


Abb. 7.2: Beulkurven des I-Trägers 2

ist zu erkennen, dass die Beulkurve der Klassische Laminattheorie deutlich oberhalb der Beulkurven für die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und 3. Ordnung nach Reddy liegt. Die Beulkurven für die Laminattheorien höherer Ordnung liegen dabei stets sehr nah beieinander. Diese Form der Ergebnisse war durchaus zu erwarten, da es sich hier um Konfigurationen eines I-Trägers handelt, deren Steg und Flansch eine moderate Dicke aufweisen und somit bei dem Vorgang der Verformung die Neigung der Querschnittsfläche sowie in gewissem Maße auch die Querschnittsverwölbung zu berücksichtigen ist. Die FSDT und TSDT liefern für solche I-Träger wesentlich bessere und genauere Ergebnisse. Interessant ist jedoch die Tatsache, dass die Beulkurven der TSDT, wenn auch nur leicht, über den Beulkurven der FSDT liegen. Die TSDT liefert aufgrund ihrer kinematischen Annahmen noch genauere Ergebnisse als die FSDT.

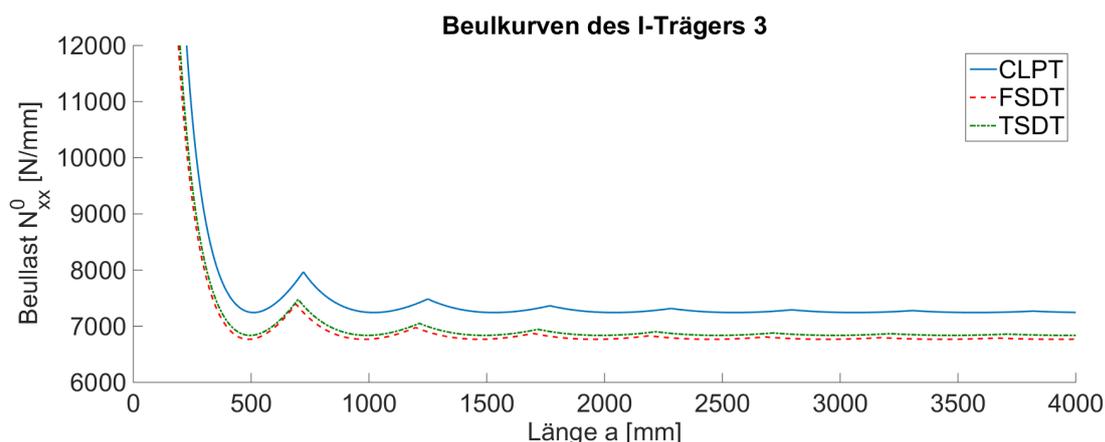


Abb. 7.3: Beulkurven des I-Trägers 3

## 7.4 I-Träger nach Kühn et al. [136]

Es werden drei weitere Trägerstrukturen mit I-Profil betrachtet, welche der Arbeit von Kühn et. al [136] entnommen sind. Der Steg und der Flansch aller drei Trägerstrukturen besitzen einen symmetrischen, orthotropen Lagenaufbau. Die Berechnung der Federsteigkeiten  $k$  für Steg und Flansch ergibt für alle drei Trägerstrukturen, dass der Flansch ausschlaggebend für den Beginn des lokalen Beulens ist.

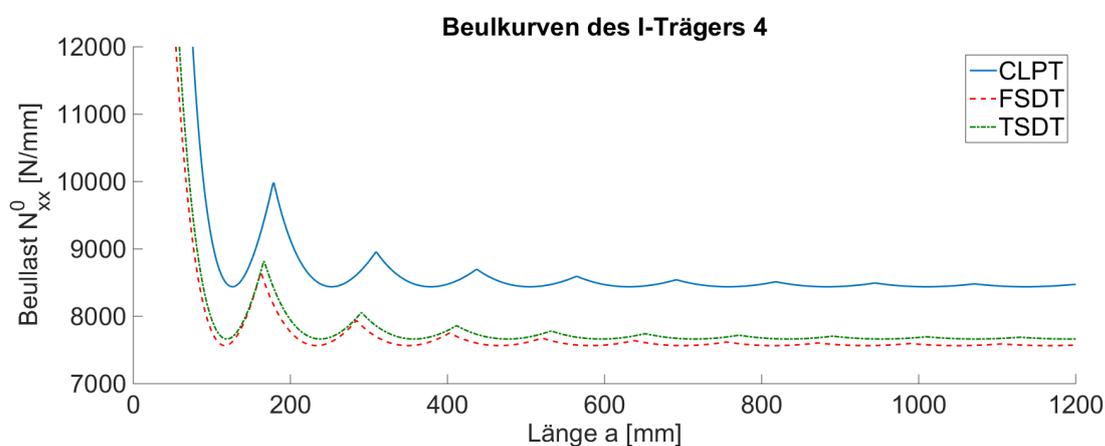


Abb. 7.4: Beulkurven des I-Trägers 4

In den Abbildungen 7.4 bis 7.6 sind für die drei Trägerstrukturen mit I-Profil die Ergebnisse der Energieverfahren auf Grundlage der CLPT, FSDT und TSDT in Form von Beulkurven dargestellt. Aufgetragen ist dabei die Beullast  $N_{xx}^0$  in N/mm über der Länge  $a$  in mm. Dargestellt ist der Bereich von  $a = 0$  mm bis  $a = 1200$  mm bzw.  $a = 1440$  mm. Bei allen I-Trägern ist wieder sehr ausgeprägt zu erkennen, dass die FSDT und die TSDT aufgrund ihrer theoretischen Annahmen und Voraussetzungen wesentlich genauere Ergebnisse liefern und ihre Beulkurven deutlich unterhalb der CLPT-Kurve liegen.

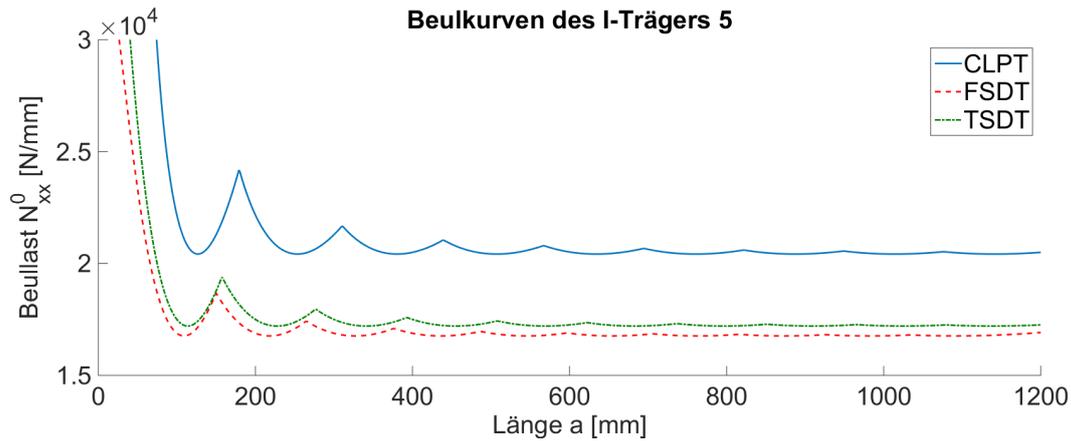


Abb. 7.5: Beulkurven des I-Trägers 5

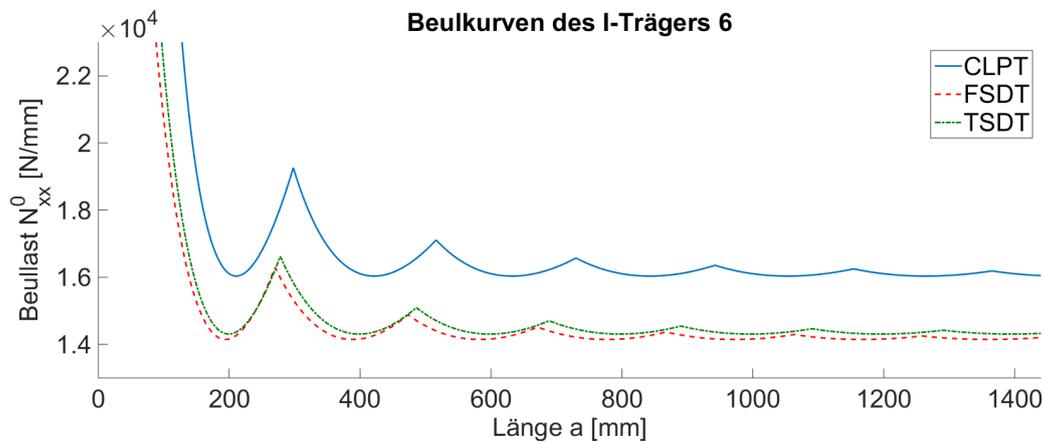


Abb. 7.6: Beulkurven des I-Trägers 6

## 7.5 Einfluss der Laminatdicke $h$

Im Weiteren soll noch einmal explizit der Einfluss der Laminatdicke  $h$  bzw. der Anzahl  $N$  der Lamineinzelschichten auf die Genauigkeit der Ergebnisse der Energieverfahren auf Grundlage der drei Laminattheorien untersucht werden. Dazu wird ein I-Träger betrachtet, der die geometrischen Abmaße der I-Träger 4 und 5 besitzt. Der Steg hat demnach die Höhe  $b_s = 100$  mm und der zugehörige Flansch die Breite  $b_f = 40$  mm. Der Steg und der Flansch sind weiterhin symmetrische, orthotrope Lamine mit den Winkellagen  $\theta = 90^\circ$  und  $\theta = 0^\circ$ . Variiert wird lediglich die Anzahl der Lamineinzelschichten von  $N = 20$  bis  $N = 200$  mit einer Schrittweite von  $\Delta N = 20$ . Die Dicke einer Lamineinzelschicht beträgt  $h_k = 0,125$  mm.

In den Abbildungen 7.7 bis 7.16 werden für die I-Träger mit unterschiedlicher Anzahl  $N$  von Lamineinzelschichten abermals die Beulkurven der Energieverfahren auf Grundlage der CLPT, FSDT und TSDT im Vergleich dargestellt. Aufgetragen ist dabei wiederum die Beullast  $N_{xx}^0$  in N/mm über der Länge  $a$  in einem Bereich von  $a = 0$  mm bis  $a = 1200$  mm. Für die Anzahl von  $N = 20$  Lamineinzelschichten (Abb. 7.7) liegen die Beulkurven der drei Laminattheorien nahezu exakt aufeinander. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die berücksichtigte Neigung der Querschnittsfläche in der FSDT sowie die zusätzlich berücksichtigte Querschnittsverwölbung in der TSDT bei sehr dünnen Laminaten quasi nicht

existent ist. Die Einträge der Steifigkeitsmatrizen der beiden höheren Laminattheorien, welche diese Verformungsgeschehen berücksichtigen würden, gehen gegen null und haben somit keinen quantitativen Einfluss auf das Ergebnis bzw. auf dessen Genauigkeit. Mit zunehmender Anzahl der Laminat einzelschichten berechnen die Energieverfahren der drei Laminattheorien unterschiedliche Ergebnisse für dasselbe Laminat-Beulproblem. Bereits bei  $N = 40$  Einzelschichten liegt die Beulkurve für die CLPT deutlich über der FSDT- und der TSDT-Kurve, welche an dieser Stelle weiterhin nahezu deckungsgleich sind. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die in den beiden höheren Laminattheorien berücksichtigte Neigung der Querschnittsfläche relevant für das Verformungsgeschehen ist, während die Querschnittverwölbung weiterhin verschwindend gering zu sein scheint. Im weiteren Verlauf der zunehmenden Laminatdicke  $h$  steigt die Relevanz der Verwölbung der Querschnittsfläche, was daran zu erkennen ist, dass die FSDT- und die TSDT-Kurve nicht mehr nahezu exakt aufeinander liegen. Die Einträge der Steifigkeitsmatrix der TSDT, die Potenzen vierter bis siebter Ordnung aufweisen, gewinnen mit zunehmender Laminatdicke  $h$  an Bedeutung und haben einen steigenden Einfluss auf die Genauigkeit des Ergebnisses. Betrachtet man einen I-Träger, dessen Steg und Flansch aus  $N = 180$  (Abb. 7.15) bzw.  $N = 200$  (Abb. 7.16) Laminat einzelschichten bestehen, so ist festzustellen, dass insbesondere das Energieverfahren auf Grundlage der FSDT nicht mehr in der Lage ist, ein plausibles Ergebnis für die Berechnung des lokalen Steg- bzw. Flanschbeulens zu liefern. Die FSDT-Kurve zeigt nicht den typischen Verlauf einer Beulkurve in Form einer Girlande. Die vorliegende Situation ist bei solch dicken Laminaten nicht mehr als Beulproblem zu betrachten, da insbesondere der Flansch, der nach Berechnung der Federsteifigkeit  $k$  ausschlaggebend für den Beginn des Beulens ist, mit einer Dicke von  $h = 22,5$  mm bzw.  $h = 25$  mm sich an dieser Stelle nicht mehr als Platte behandeln lässt. Hier sind andere Stabilitätsfälle zu betrachten.

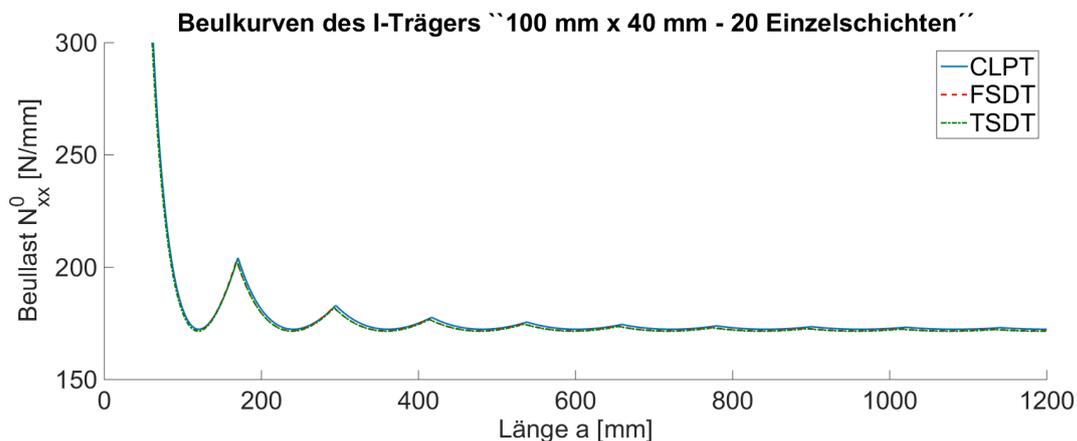


Abb. 7.7: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 20 Einzelschichten"

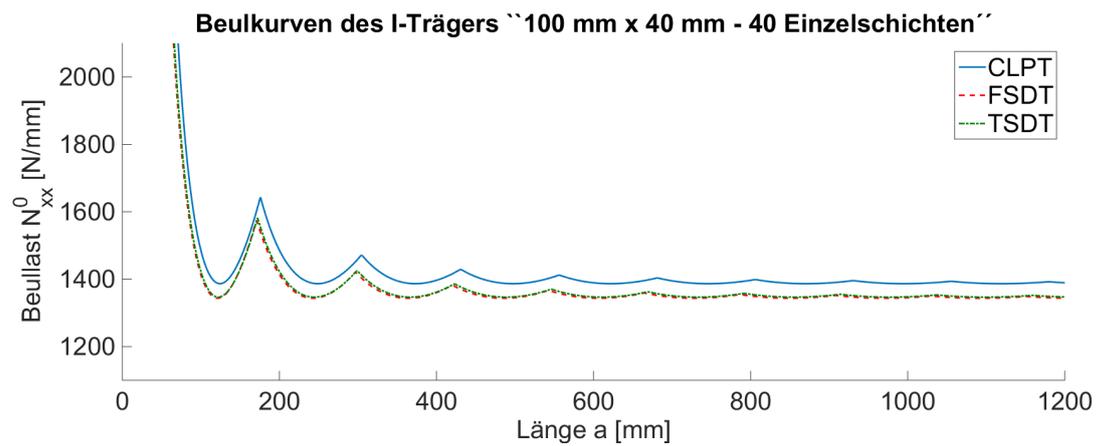


Abb. 7.8: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 40 Einzelschichten"

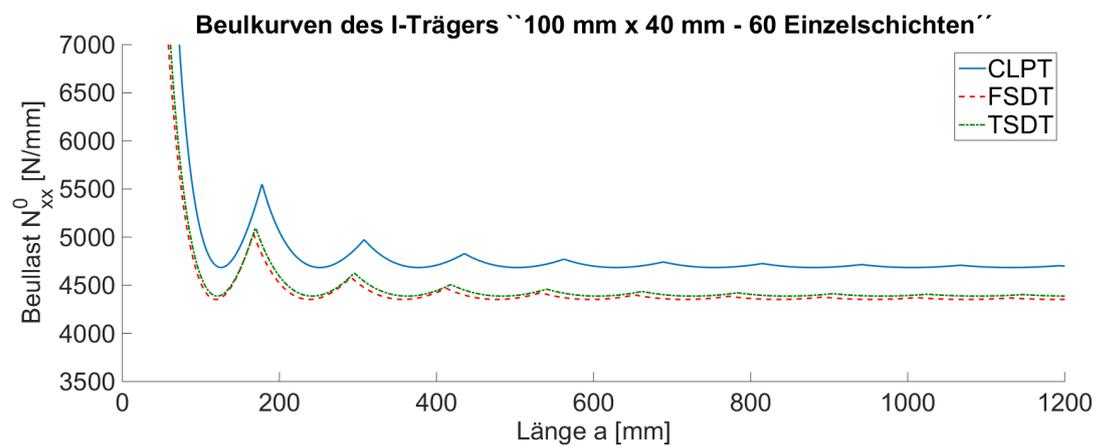


Abb. 7.9: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 60 Einzelschichten"

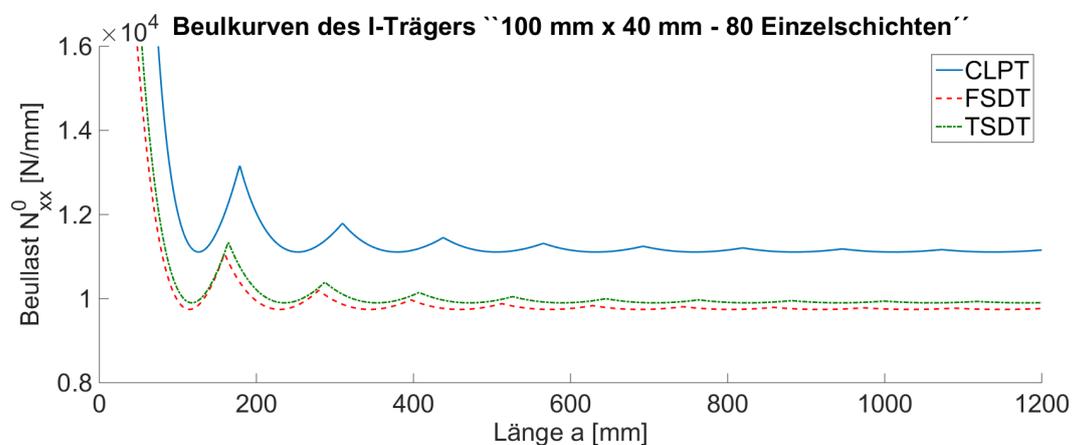


Abb. 7.10: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 80 Einzelschichten"

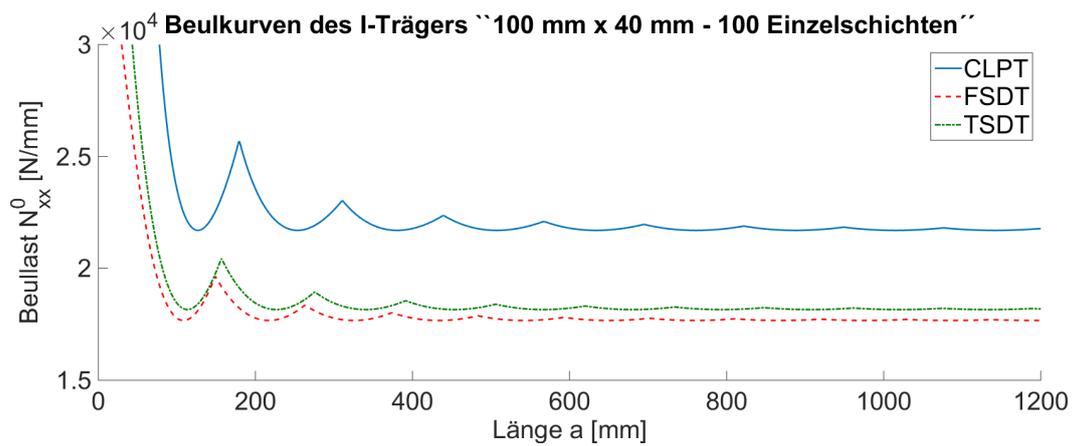


Abb. 7.11: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 100 Einzelschichten"

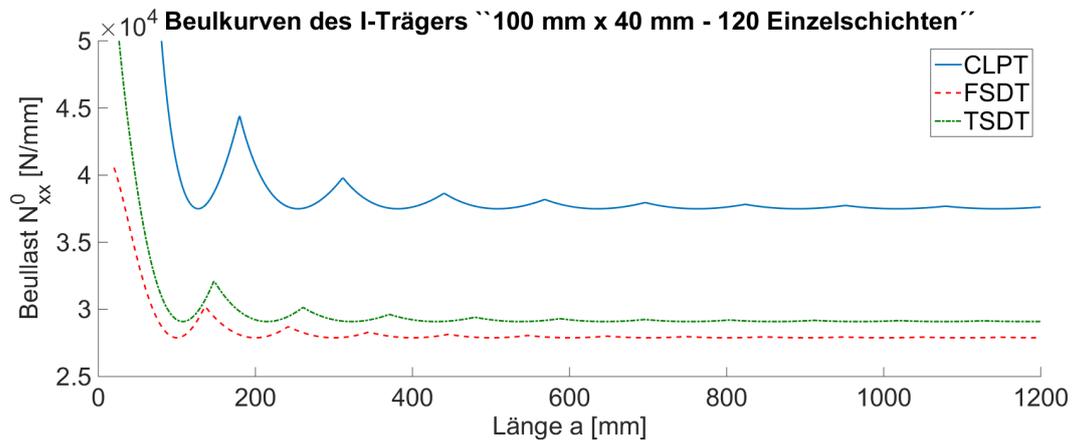


Abb. 7.12: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 120 Einzelschichten"

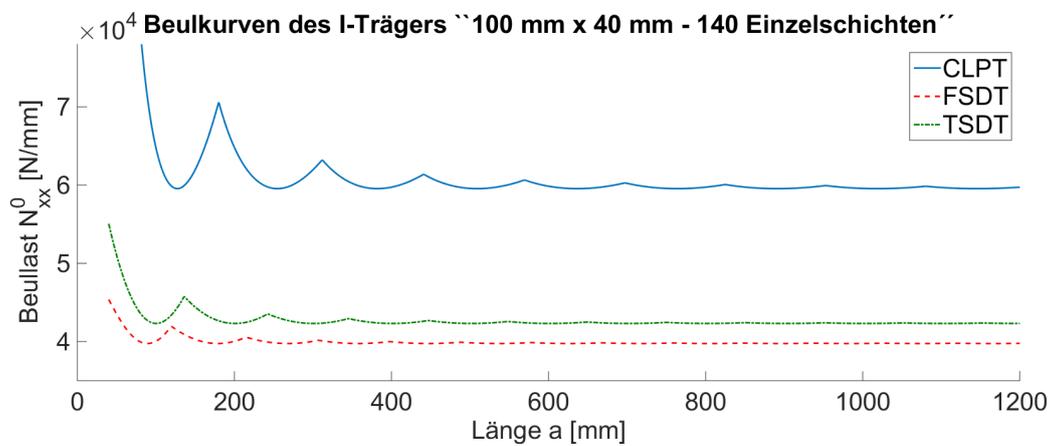


Abb. 7.13: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 140 Einzelschichten"

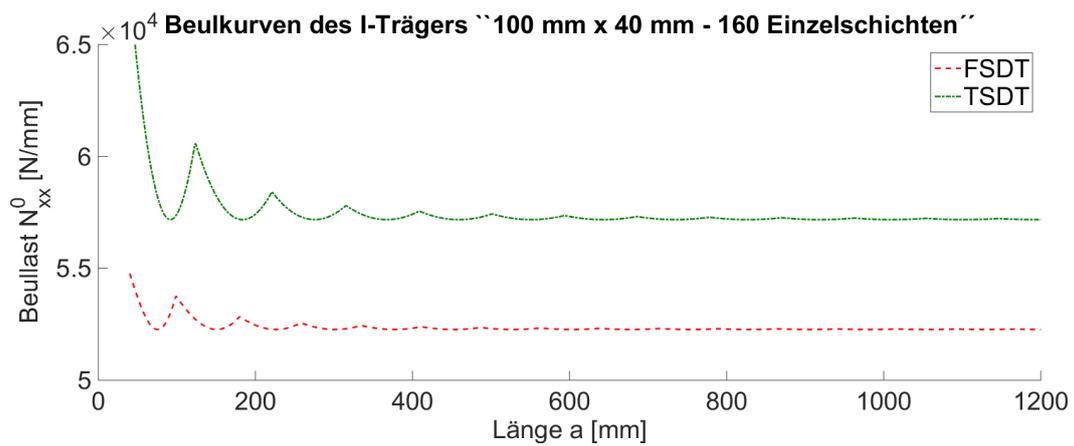


Abb. 7.14: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 160 Einzelschichten"

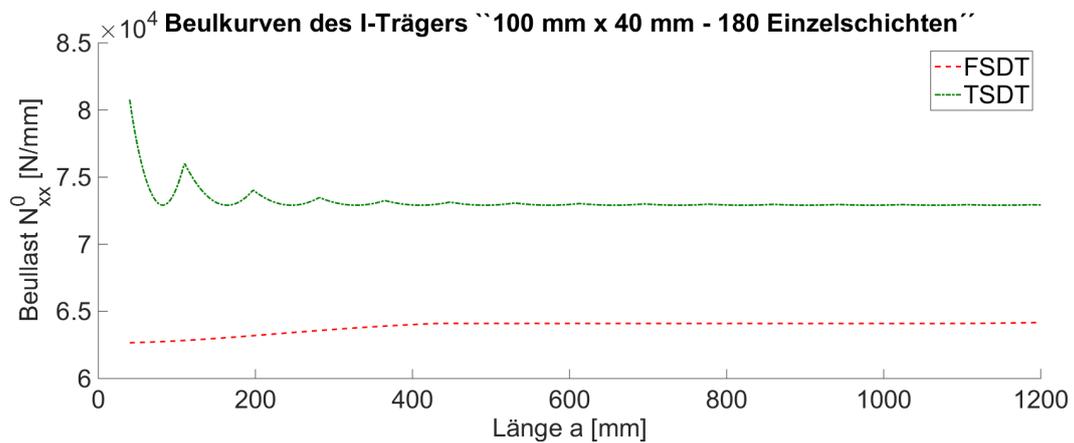


Abb. 7.15: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 180 Einzelschichten"

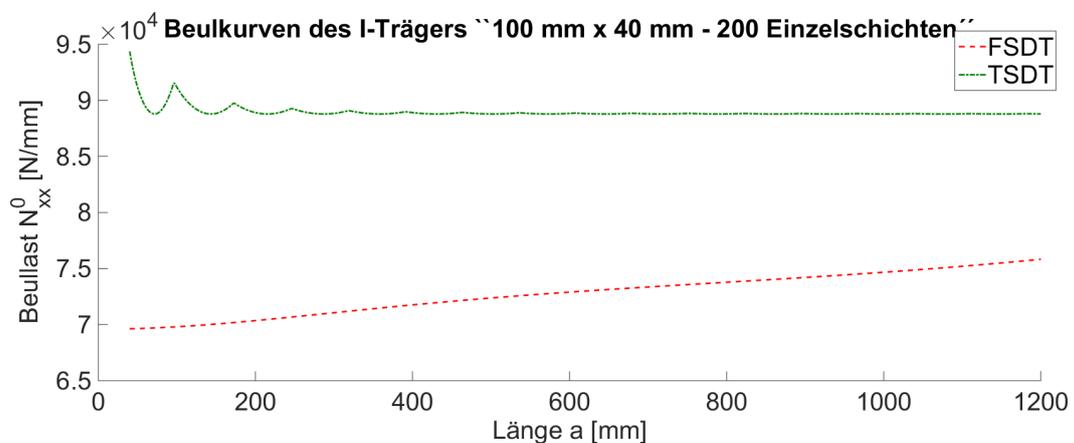


Abb. 7.16: Beulkurven des I-Trägers "100 mm x 40 mm - 200 Einzelschichten"



# Kapitel 8

## Lokales Beulen mit Hilfe des Ritz-Verfahrens

### 8.1 Einführung

Die bisherigen Ausführungen zur lokalen Stabilität ziehen recht elementar ansetzbare Strategien heran und erlauben ausschließlich die Betrachtung ideal-orthotroper Lamine. Es muss jedoch davon ausgegangen werden, dass in einer praktischen Anwendung auch Lagenaufbauten zum Tragen kommen, die anisotrope Eigenschaften und dabei auch Biege-Drill-Kopplung aufweisen. Daher ist dieses Kapitel der Entwicklung des Ritz-Verfahrens für verschiedene Laminat-Situationen gewidmet, und zwar basierend auf der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT) sowie auf der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung (TSDT). Es sei bereits an dieser Stelle angemerkt, dass zu einem späteren Zeitpunkt der Projektbearbeitung die Entscheidung fiel, weitere Arbeiten ausschließlich auf der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung aufbauend anzustrengen. Dennoch haben die in diesem Kapitel bereitgestellten Ausführungen zur FSDT Neuigkeitscharakter und sollen daher auch der Fachöffentlichkeit zugänglich gemacht werden.

### 8.2 Das Ritz-Verfahren nach FSDT

#### 8.2.1 Strukturelle Situation und Grundgleichungen

Es werde ein Laminat mit rechteckigem Grundriss (Länge  $a$ , Breite  $b$ ) betrachtet (Abb. 8.1), das unter den angezeigten Kraftflüssen  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$  und  $N_{xy}^0$  stehe, wobei der Kraftfluss  $N_{xx}^0$  linear über  $y$  veränderlich sein möge. Das Laminat sei symmetrisch, es werden aber ansonsten keine weiteren Ansprüche an den Lagenaufbau erhoben. Die beiden Längsränder bei  $y = 0$  und  $y = b$  seien darüber hinaus elastisch eingespannt (EinspannstEIFigkeiten  $k_r$  und  $k_l$ ). In Abb. 8.1 sind exemplarisch gelenkige Lagerungen an allen Rändern vorgesehen, wir werden aber im weiteren Verlauf dieses Kapitels eine Reihe weiterer Kombinationen von Randbedingungen betrachten. Gesucht werde nun diejenige kritische Lastkombination, bei der das Laminat in den gebeulten Zustand übergeht.

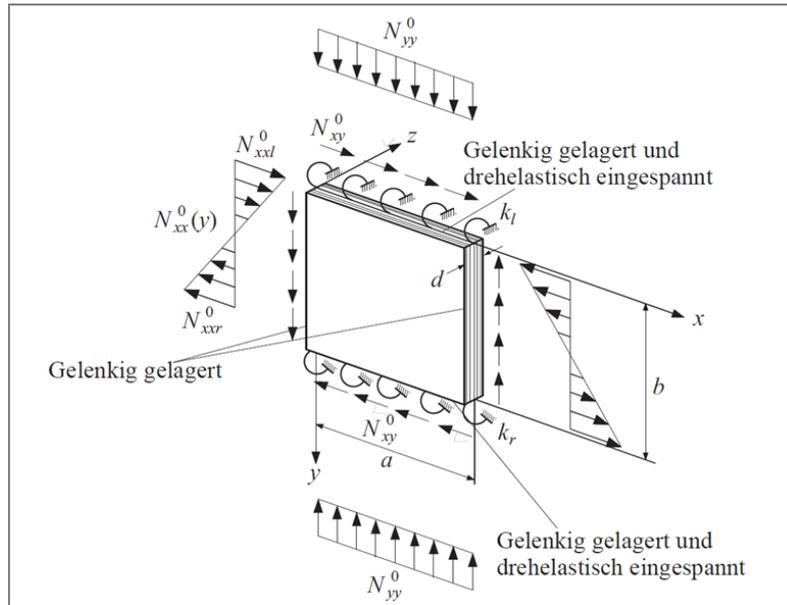


Abb. 8.1: Betrachtete Laminat-Situation.

Das Konstitutivgesetz im Rahmen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung lautet unter der Annahme symmetrischer Laminats:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{44} & KA_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA_{45} & KA_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Das elastische Gesamtpotential  $\Pi$  des gebeulenen Laminats setzt sich aus dem inneren Potential  $\Pi_i$ , dem äußeren Potential  $\Pi_a$  und der in den Randfedern gespeicherten Energie  $\Pi_s$  zusammen:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a + \Pi_s. \quad (8.2)$$

Die für das Ritz-Verfahren notwendige innere Energie bzw. das innere Potential  $\Pi_i$  lautet gegenwärtig:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz}) dV, \quad (8.3)$$

bzw. nach Durchführen der Integration bezüglich der Dickenrichtung  $z$  und bei Vernachlässigung der ebenen Verschiebungen  $u_0$  und  $v_0$ :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ M_{xx}^0 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_{yy}^0 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right]$$

$$+ Q_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) + Q_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) \Big] dx dy. \quad (8.4)$$

Einsetzen des Konstitutivgesetzes nach Schubdeformationstheorie 1. Ordnung ergibt dann:

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right. \\ & + 2D_{16} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + 2D_{26} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ & + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ & + K A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_y + \psi_y^2 \right) \\ & + 2K A_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \psi_x \psi_y \right) \\ & \left. + K A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_x + \psi_x^2 \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Das äußere Potential  $\Pi_a$  ergibt sich unter den gegebenen Randlasten als:

$$\Pi_a = -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \lambda N_{xx}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \lambda N_{yy}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2\lambda N_{xy}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy. \quad (8.6)$$

Hierin ist die Größe  $\lambda$  der Lastmultiplikator, der anzeigt, um welches Maß die angelegte Belastung gesteigert werden darf, bevor Beulen eintritt. Der linear veränderliche Kraftfluss  $N_{xx}^0(y)$  kann formuliert werden als:

$$N_{xx}^0(y) = \frac{N_{xxl}^0}{b} [(\psi - 1)y + b], \quad (8.7)$$

wenn der Randwert  $N_{xxr}^0$  das  $\psi$ -fache Vielfache des Randwerts  $N_{xxl}^0$  ist.

Schließlich ist noch die Federenergie  $\Pi_s$  zu betrachten, die sich gegenwärtig wie folgt angeben lässt:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ k_l \left( \psi_y|_{y=0} \right)^2 + k_r \left( \psi_y|_{y=b} \right)^2 \right] dx. \quad (8.8)$$

## 8.2.2 Ansatzfunktionen und Energieformulierungen

Für jede der nachfolgend betrachteten Arten von Randbedingungen wird ein allgemeiner Ansatz für die Beulfreiheitsgrade wie folgt gemacht:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y), \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y), \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y), \end{aligned} \quad (8.9)$$

wobei hier die Forderung erhoben wird, dass die Ansatzfunktionen sämtliche geometrischen Randbedingungen zu erfüllen haben. Das innere Potential  $\Pi_i$  kann damit geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\Pi_i = & \frac{D_{11}}{2} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{x1m}}{dx} \frac{d\psi_{x1p}}{dx} dx \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy \\
& + \frac{D_{22}}{2} \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{y1m} \psi_{y1p} dx \int_0^b \frac{d\psi_{y2n}}{dy} \frac{d\psi_{y2q}}{dy} dy \\
& + D_{12} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{x1m}}{dx} \psi_{y1p} dx \int_0^b \frac{d\psi_{y2q}}{dy} \psi_{x2n} dy \\
& + D_{16} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{x1m}}{dx} \psi_{x1p} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2q}}{dy} \psi_{x2n} dy \\
& + D_{16} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{x1m}}{dx} \frac{d\psi_{y1p}}{dx} dx \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy \\
& + D_{26} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{y1p} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2n}}{dy} \frac{d\psi_{y2q}}{dy} dy \\
& + D_{26} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{y1m}}{dx} \psi_{y1p} dx \int_0^b \psi_{x2n} \frac{d\psi_{y1q}}{dy} dy \\
& + \frac{D_{66}}{2} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{x1p} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2n}}{dy} \frac{d\psi_{x2q}}{dy} dy \\
& + D_{66} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{x1m} \frac{d\psi_{y1p}}{dx} dx \int_0^b \frac{d\psi_{x2n}}{dy} \psi_{y2q} dy \\
& + \frac{D_{66}}{2} \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \frac{d\psi_{y1m}}{dx} \frac{d\psi_{y1p}}{dx} dx \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy \\
& + \frac{K A_{44}}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a w_{1m} w_{1p} dx \int_0^b \frac{dw_{2n}}{dy} \frac{dw_{2q}}{dy} dy \\
& + K A_{44} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} W_{mn} Y_{pq} \int_0^a w_{1m} \psi_{y1p} dx \int_0^b \frac{dw_{2n}}{dy} \psi_{y2q} dy \\
& + \frac{K A_{44}}{2} \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{y1m} \psi_{y1p} dx \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K A_{45} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a \frac{dw_{1m}}{dx} w_{1p} dx \int_0^b w_{2n} \frac{dw_{2q}}{dy} dy \\
& + K A_{45} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} W_{mn} Y_{pq} \int_0^a \frac{dw_{1m}}{dx} \psi_{y1p} dx \int_0^b w_{2n} \psi_{y1q} dy \\
& + K A_{45} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} W_{mn} X_{pq} \int_0^a w_{1m} \psi_{x1p} dx \int_0^b \frac{dw_{2n}}{dy} \psi_{x2q} dy \\
& + K A_{45} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{y1p} dx \int_0^b \psi_{x2m} \psi_{y2p} dy \\
& + \frac{K A_{55}}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a \frac{dw_{1m}}{dx} \frac{dw_{1p}}{dx} dx \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\
& + K A_{55} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} W_{mn} X_{pq} \int_0^a \frac{dw_{1m}}{dy} \psi_{x1p} dx \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy \\
& + \frac{K A_{55}}{2} \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{x1p} dx \int_0^b \psi_{x2m} \psi_{x2p} dy.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle die folgenden integralen Resultanten der Ansatzfunktionen in (8.9) und ihrer Ableitungen einzuführen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}^1 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^2 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^3 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{y1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^4 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j w_{1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^5 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^6 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}}{\partial x^j} dx, \\
\Delta_{ij}^1 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{x2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^2 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{x2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^3 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{y2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j w_{2q}}{\partial y^j} dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}}{\partial y^j} dy.\end{aligned}\quad (8.11)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\Gamma_i^{klkl} &= \frac{1}{2}(D_{11}\Omega_{11}^1\Delta_{00}^1 + D_{66}\Omega_{00}^1\Delta_{11}^1 + kA_{55}\Omega_{00}^1\Delta_{00}^1) + D_{16}\Omega_{10}^1\Delta_{01}^1, \\ \Gamma_i^{ijij} &= \frac{1}{2}(D_{22}\Omega_{00}^3\Delta_{11}^3 + D_{66}\Omega_{11}^3\Delta_{00}^3 + kA_{44}\Omega_{00}^{mp}\Delta_{00}^{nq}) + D_{26}\Omega_{10}^{3p}\Delta_{01}^3, \\ \Gamma_i^{klij} &= D_{12}\Omega_{10}^2\Delta_{01}^2 + D_{16}\Omega_{11}^2\Delta_{00}^2 + D_{26}\Omega_{00}^2\Delta_{11}^2 + D_{66}\Omega_{01}^2\Delta_{10}^2 + kA_{45}\Omega_{00}^2\Delta_{00}^2, \\ \Gamma_i^{mnmn} &= \frac{k}{2}(A_{44}\Omega_{00}^4\Delta_{11}^4 + 2A_{45}\Omega_{10}^4\Delta_{01}^4 + A_{55}\Omega_{11}^4\Delta_{00}^4), \\ \Gamma_i^{mni j} &= \frac{k}{2}(2A_{44}\Omega_{00}^5\Delta_{10}^5 + 2A_{45}\Omega_{10}^5\Delta_{00}^5), \\ \Gamma_i^{m nkl} &= \frac{k}{2}(2A_{45}\Omega_{00}^6\Delta_{10}^6 + 2A_{55}\Omega_{10}^6\Delta_{00}^6),\end{aligned}\quad (8.12)$$

kann das innere Potential  $\Pi_i$  kompakt dargestellt werden als:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \Gamma_i^{klkl} \\ &+ \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{ijij} \\ &+ \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{klij} \\ &+ \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Gamma_i^{mnmn} \\ &+ \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} W_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{mni j} \\ &+ \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} W_{mn} X_{pq} \Gamma_i^{m nkl}.\end{aligned}\quad (8.13)$$

Ganz analog kann auch das äußere Potential  $\Pi_a$  angegeben werden:

$$\begin{aligned}\Pi_a &= - \lambda \frac{N_{xx}^0}{2b} (\psi - 1) \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\ &- \lambda \frac{N_{xx}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\ &- \lambda \frac{N_{yy}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a w_{1m} w_{1p} dx \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy\end{aligned}$$

$$- \lambda N_{xy}^0 \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} w_{1p} dx \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy, \quad (8.14)$$

bzw. mit (8.11) und der Abkürzung

$$Q_{00} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy \quad (8.15)$$

in folgender Form:

$$\begin{aligned} \Pi_a &= -\lambda \frac{N_{xx}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \left[ \frac{(\psi-1)}{b} \Omega_{11}^4 Q_{00} + \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4 \right] \\ &- \lambda \frac{N_{yy}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 \\ &- \lambda N_{xy}^0 \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Mit der Abkürzung

$$\Gamma_a^{mnmn} = \frac{N_{xx}^0}{2} \left[ \frac{(\psi-1)}{b} \Omega_{11}^4 Q_{00} + \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4 \right] + \frac{N_{yy}^0}{2} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 + N_{xy}^0 \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4 \quad (8.17)$$

folgt schließlich:

$$\Pi_a = -\Lambda \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Gamma_a^{mnmn}. \quad (8.18)$$

Schlußendlich kann noch die Federenergie  $\Pi_s$  in kompakter Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \frac{k_l}{2} \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{y1m} \psi_{y1p} dx (\psi_{y2n} \psi_{y2q})|_{y=0} \\ &+ \frac{k_r}{2} \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \int_0^a \psi_{y1m} \psi_{y1p} dx (\psi_{y2n} \psi_{y2q})|_{y=b}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \psi_{y2n} \psi_{y2q}|_{y=0}, \\ \Theta_{11} &= \psi_{y2n} \psi_{y2q}|_{y=b} \end{aligned} \quad (8.20)$$

sowie

$$\Gamma_s^{ijij} = \frac{1}{2} T_{00}^{mp} (k_l \Phi_{11} + k_r \Theta_{11}) \quad (8.21)$$

folgt:

$$\Pi_s = \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \Gamma_s^{ijij}. \quad (8.22)$$

### 8.2.3 Eigenwertproblem

Das Erreichen der Verzweigungslast bzw. der kritischen Lastkombination wird durch einen indifferenten Gleichgewichtszustand beschrieben, was gleichbedeutend mit dem Verschwinden der ersten Variation des elastischen Gesamtpotentials  $\Pi$  des gebeuln Laminats ist:

$$\delta \Pi = 0. \quad (8.23)$$

Da die mathematische Form der Beulfreiheitsgrade mit den (noch nicht näher spezifizierten) Ansatzfunktionen bereits vollständig festgelegt wurde, führt die Variationsaussage (8.23) auf die sog. Ritzschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y_{mn}} = 0. \quad (8.24)$$

Durchführen der hier geforderten Ableitungen und Zusammenfassen in einer Vektor-Matrix-Schreibweise liefert das folgende Gleichungssystem:

$$\left[ \underline{\underline{K}}_i + \underline{\underline{K}}_s - \lambda \underline{\underline{K}}_a \right] \underline{W} = \underline{0}. \quad (8.25)$$

Dies ist ein lineares Eigenwertproblem, wobei der Lastmultiplikator  $\lambda$  den Eigenwert und der Vektor  $\underline{W}$  den Eigenvektor darstellt. Die Matrix  $\underline{\underline{K}}_i$  ist die sog. Steifigkeitsmatrix des betrachteten Laminats, und  $\underline{\underline{K}}_a$  wird üblicherweise als geometrische Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Die Matrix  $\underline{\underline{K}}_s$  beinhaltet die Steifigkeitsbeiträge der Randfedern.

Die Zusammensetzung der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}_i$  soll an dieser Stelle kurz näher ausgeführt werden. Sie setzt sich aus mehreren Submatrizen zusammen:

$$\underline{\underline{K}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{1,w}^{mnmn} & \underline{\underline{K}}_{1,w}^{mnkl} & \underline{\underline{K}}_{1,w}^{mnij} \\ \underline{\underline{K}}_{1,x}^{mnkl} & \underline{\underline{K}}_{1,w}^{klkl} & \underline{\underline{K}}_{1,w}^{klij} \\ \underline{\underline{K}}_{1,y}^{mnij} & \underline{\underline{K}}_{1,y}^{ijkl} & \underline{\underline{K}}_{1,y}^{ijij} \end{bmatrix}, \quad (8.26)$$

wobei die folgenden Symmetriebedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{1,x}^{mnkl} &= \left( \underline{\underline{K}}_{1,w}^{mnkl} \right)^T, \\ \underline{\underline{K}}_{1,y}^{mnij} &= \left( \underline{\underline{K}}_{1,w}^{mnij} \right)^T, \\ \underline{\underline{K}}_{1,y}^{klij} &= \left( \underline{\underline{K}}_{1,x}^{klij} \right)^T. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Die einzelnen Submatrizen wiederum können systematisch in weitere Teilmatrizen zerlegt werden wie folgt:

$$\underline{\underline{K}}_{i,w}^{mnpq} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,w}^{11} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{12} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{13} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{1P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,w}^{21} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{22} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{23} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{2P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,w}^{31} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{32} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{33} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{3P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{i,w}^{M1} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{M2} & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{M3} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,w}^{MP} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{K}}_{i,x}^{mnpq} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,x}^{11} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{12} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{13} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{1P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,x}^{21} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{22} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{23} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{2P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,x}^{31} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{32} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{33} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{3P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{i,x}^{M1} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{M2} & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{M3} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,x}^{MP} \end{bmatrix}, \\
\underline{\underline{K}}_{i,y}^{mnpq} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,y}^{11} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{12} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{13} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{1P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y}^{21} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{22} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{23} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{2P} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y}^{31} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{32} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{33} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{3P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{i,y}^{M1} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{M2} & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{M3} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y}^{MP} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Die Komponenten der hier auftretenden Submatrizen lassen sich schließlich angeben als:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{K}}_{i,w}^{mp} &= [K_{nq,i,w}^{mp}], \\
\underline{\underline{K}}_{i,x}^{mp} &= [K_{nq,i,x}^{mp}], \\
\underline{\underline{K}}_{i,y}^{mp} &= [K_{nq,i,y}^{mp}],
\end{aligned} \tag{8.29}$$

mit:

$$\begin{aligned}
K_{nq,i,w}^{mp} &= \Gamma_i^{mnpq} + \Gamma_i^{pqmn}, \\
K_{nq,i,x}^{mp} &= \Gamma_i^{mnpq} + \Gamma_i^{pqmn}, \\
K_{nq,i,y}^{mp} &= \Gamma_i^{mnpq} + \Gamma_i^{pqmn}.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Auf ähnliche Art und Weise können die weiteren Matrizen des Eigenwertproblems konstruiert werden, was hier aber nicht weiter ausgeführt wird.

### 8.3 Betrachtete Randbedingungen

Die hier zunächst allgemeingültig beschriebene Methodik nach dem Ritz-Verfahren wurde für die vier Fälle der Abb. 8.2 unter der Lastfallkombination der Abb. 8.1 konkret weiterentwickelt. Die vier Fälle sind:

- Fall 1: Allseitig gelenkig gelagertes Laminat mit elastischen Randeinspannungen an den Stellen  $y = 0$  (Federsteifigkeit  $k_l$ ) und  $y = b$  (Federsteifigkeit  $k_r$ ),
- Fall 2: Zwei gelenkig gelagerte Ränder bei  $x = 0$  und  $x = a$ , zwei ideal-starr eingespannte Ränder bei  $y = 0$  und  $y = b$ ,
- Fall 3: Zwei gelenkig gelagerte Ränder bei  $x = 0$  und  $x = a$ , ein elastisch eingespannter Rand bei  $y = 0$  (Federsteifigkeit  $k$ ), ein freier Rand bei  $y = b$ ,
- Fall 4: Zwei gelenkig gelagerte Ränder bei  $x = 0$  und  $x = a$ , ein ideal-starr eingespannter Rand bei  $y = 0$ , ein freier Rand bei  $y = b$ .

Diese vier Grundfälle werden an späterer Stelle weiter verwendet werden zur lokalen und interaktiven Beulanalyse ganzer Trägerquerschnitte (Kapitel 9).

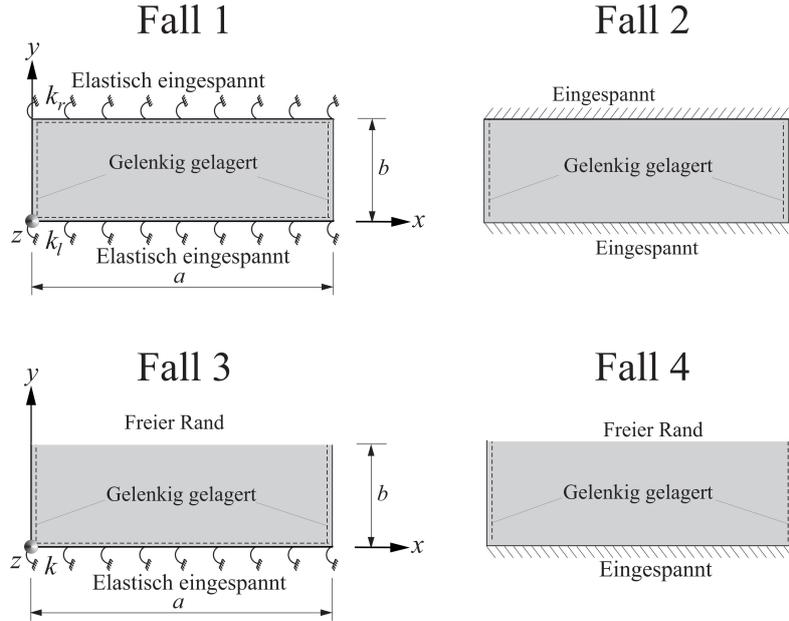


Abb. 8.2: Betrachtete Arten von Randbedingungen.

### 8.3.1 Ansatzfunktionen für Fall 1

Für Fall 1 werden die folgenden Ansatzfunktionen verwendet:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\
 \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\
 \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

### 8.3.2 Ansatzfunktionen für Fall 2

Für Fall 2 haben sich die folgenden Ansatzfunktionen als zweckmäßig erwiesen:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{b}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \right], \\
 \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{b}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \right], \\
 \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{b}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \right]. \quad (8.32)$$

### 8.3.3 Ansatzfunktionen für Fall 3

Fall 3 verwendet die folgenden Ansätze:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^n, \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^n, \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

### 8.3.4 Ansatzfunktionen für Fall 4

Für Fall 4 schließlich erweisen sich die folgenden Ansatzfunktionen als zweckdienlich:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}, \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}, \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y) \\ &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Die Resultanten (8.11) sowie (8.15) und (8.20) für die Fälle 1-4 sind im Anhang 8.A konkret ausgewertet angegeben.

## 8.4 Das Ritz-Verfahren nach TSDT

Eine Beulanalyse mittels FSDT birgt immer das 'zufällige' Element des Schubkorrekturfaktors  $K$ . Es existieren verschiedene Möglichkeiten, den Schubkorrekturfaktor zu ermitteln, so dass eine Berechnung nach FSDT stets eine gewisse Beliebigkeit mit sich bringt. Die Schubdeformationstheorie 3. Ordnung (TSDT) umgeht diese Beliebigkeit, indem sie

auf einem physikalisch einwandfrei diskutierbaren Verschiebungsfeld basiert und damit auch auf die zu erwartenden Verläufe der Verzerrungen und Spannungen über die Laminatdicke führt. Aus diesem Grund werden alle weiteren Ausführungen auf der TSDT basieren, und die nachfolgend dargelegten Herleitungen bilden die Grundlage für die Ausführungen des Kapitels 9.

Untersucht wird erneut die Situation der Abb. 8.1 sowie die daraus ableitbaren Fälle 1-4 der Abb. 8.2. Da die Freiheitsgrade im Rahmen der TSDT mit denjenigen nach der FSĐT identisch sind, können vielerlei Aspekte der Vorgehensweise direkt aus dem Ritz-Verfahren nach der FSĐT für die TSDT übernommen werden.

Das Konstitutivgesetz für ein Laminat nach der TSDT lautet:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \\ R_y \\ R_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A_S}} & \underline{\underline{D_S}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D_S}} & \underline{\underline{F_S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ -\frac{4}{h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

wobei wir hier symmetrische, aber beliebig aufgebaute Laminats voraussetzen wollen, so dass  $B_{ij} = 0$  und  $E_{ij} = 0$  gilt.

Das innere Potential  $\Pi_i$  eines Laminats im Rahmen der TSDT lautet ganz allgemein:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (8.36)$$

Mittels der kinematischen Beziehungen bzgl. des infinitesimalen Verzerrungstensors und nach Integration bezüglich der Dickenrichtung  $z$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ N_{xx}^0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy}^0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ &+ M_{xx}^0 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_{yy}^0 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ &- \frac{4P_{xx}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{4P_{yy}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \frac{4P_{xy}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ &+ Q_y \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + Q_x \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ &\left. + \frac{4R_y}{t^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{4R_x}{t^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Mit  $B_{ij} = 0$  und  $E_{ij} = 0$  erhalten wir nach Einsetzen des Konstitutivgesetzes:

$$\begin{aligned}
\Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right. \\
& + 2D_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{11} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right] - \frac{8}{3t^2} F_{22} \left[ \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{12} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{66} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] \\
& + \frac{16}{9t^4} H_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{16}{9t^4} H_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\
& + \frac{32}{9t^4} H_{12} \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\
& + \frac{32}{9t^4} \left[ H_{16} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{26} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
& + \frac{16}{9t^4} H_{66} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + 4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& + A_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& + 2A_{45} \left[ \psi_x \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \\
& - \frac{8}{t^2} D_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{8}{t^2} D_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& - \frac{16}{t^2} D_{45} \left( \psi_y \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{16}{t^2} F_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{16}{t^4} F_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& + \left. \frac{32}{t^4} F_{45} \left( \psi_x \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\} dx dy. \tag{8.38}
\end{aligned}$$

Das äußere Potential  $\Pi_a$  bleibt gegenüber (8.6) unverändert und lautet:

$$\Pi_a = -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \lambda N_{xx}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \lambda N_{yy}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2\lambda N_{xy}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy. \tag{8.39}$$

Auch die Federenergie kann unverändert mit (8.8) übernommen werden:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ k_l \left( \psi_y|_{y=0} \right)^2 + k_r \left( \psi_y|_{y=b} \right)^2 \right] dx. \quad (8.40)$$

Das Ritz-Verfahren nach TSDT arbeitet mit identischen Ansätzen für die Beulfreiheitsgrade, wie sie schon im Rahmen der FSDT verwendet wurden, d.h. es wird die folgende Approximation verwendet:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x) w_{2n}(y), \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn} \psi_{x1m}(x) \psi_{x2n}(y), \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn} \psi_{y1m}(x) \psi_{y2n}(y). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Auch hier werden wieder Integralresultanten der Ansatzfunktionen eingeführt wie folgt:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^1 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Omega_{ij}^2 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Omega_{ij}^3 &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{y1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Omega_{ij}^4 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j w_{1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Omega_{ij}^5 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Omega_{ij}^6 &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}}{\partial x^j} dx, \\ \Delta_{ij}^1 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{x2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^2 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{x2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^3 &= \int_0^b \frac{\partial^i \psi_{y2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j w_{2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}}{\partial y^j} dy, \\ \Delta_{ij}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^i w_{2n}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}}{\partial y^j} dy. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Zusätzlich werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{klkl} &= \frac{1}{2} (D_{11} \Omega_{11}^1 \Delta_{00}^1 + D_{66} \Omega_{00}^1 \Delta_{11}^1) + D_{16} \Omega_{10}^1 \Delta_{01}^1 \\ &- \frac{4}{3h^2} F_{11} \Omega_{11}^1 \Delta_{00}^1 - \frac{8}{3h^2} F_{16} \Omega_{10}^1 \Delta_{01}^1 - \frac{4}{3h^2} F_{66} \Omega_{00}^1 \Delta_{11}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{9h^4} H_{11} \Omega_{11}^1 \Delta_{00}^1 + \frac{16}{9h^4} H_{16} \Omega_{10}^1 \Delta_{01}^1 + \frac{8}{9h^4} H_{66} \Omega_{00}^1 \Delta_{11}^1 \\
& + \frac{1}{2} A_{55} \Omega_{00}^1 \Delta_{00}^1 + \frac{8}{h^4} F_{55} \Omega_{00}^1 \Delta_{00}^1 - \frac{4}{h^2} D_{55} \Omega_{00}^1 \Delta_{00}^1, \\
\Gamma_i^{ijij} & = \frac{1}{2} (D_{22} \Omega_{00}^3 \Delta_{11}^3 + D_{66} \Omega_{11}^3 \Delta_{00}^3) + D_{26} \Omega_{10}^3 \Delta_{01}^3 \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{22} \Omega_{00}^3 \Delta_{11}^3 - \frac{8}{3h^2} F_{26} \Omega_{01}^3 \Delta_{10}^3 - \frac{4}{3h^2} F_{66} \Omega_{11}^3 \Delta_{00}^3 \\
& + \frac{8}{9h^4} H_{22} \Omega_{00}^3 \Delta_{11}^3 + \frac{16}{9h^4} H_{26} \Omega_{01}^3 \Delta_{10}^3 + \frac{8}{9h^4} H_{66} \Omega_{11}^3 \Delta_{00}^3 \\
& + \frac{1}{2} A_{44} \Omega_{00}^3 \Delta_{00}^3 - \frac{4}{h^2} D_{44} \Omega_{00}^3 \Delta_{00}^3 + \frac{8}{h^4} F_{44} \Omega_{00}^3 \Delta_{00}^3, \\
\Gamma_i^{klij} & = D_{12} \Omega_{10}^2 \Delta_{01}^2 + D_{16} \Omega_{11}^2 \Delta_{00}^2 + D_{26} \Omega_{00}^2 \Delta_{11}^2 \\
& + D_{66} \Omega_{01}^2 \Delta_{10}^2 - \frac{8}{3h^2} F_{12} \Omega_{10}^2 \Delta_{01}^2 - \frac{8}{3h^2} F_{16} \Omega_{11}^2 \Delta_{00}^2 \\
& - \frac{8}{3h^2} F_{26} \Omega_{00}^2 \Delta_{11}^2 - \frac{8}{3h^2} F_{66} \Omega_{01}^2 \Delta_{10}^2 + \frac{16}{9h^4} H_{12} \Omega_{10}^2 \Delta_{01}^2 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{16} \Omega_{11}^2 \Delta_{00}^2 + \frac{16}{9h^4} H_{26} \Omega_{00}^2 \Delta_{11}^2 + \frac{16}{9h^4} H_{66} \Omega_{01}^2 \Delta_{10}^2 \\
& + A_{45} \Omega_{00}^2 \Delta_{00}^2 - \frac{8}{h^2} D_{45} \Omega_{00}^2 \Delta_{00}^2 + \frac{16}{h^4} F_{45} \Omega_{00}^2 \Delta_{00}^2, \\
\Gamma_i^{mmmn} & = \frac{8}{9h^4} H_{11} \Omega_{22}^4 \Delta_{00}^4 + \frac{16}{9h^4} H_{12} \Omega_{20}^4 \Delta_{02}^4 \\
& + \frac{8}{9h^4} H_{22} \Omega_{00}^4 \Delta_{22}^4 + \frac{32}{9h^2} H_{16} \Omega_{12}^4 \Delta_{10}^4 + \frac{32}{9h^2} H_{26} \Omega_{01}^4 \Delta_{21}^4 \\
& + \frac{32}{9h^4} H_{66} \Omega_{11}^4 \Delta_{11}^4 + \frac{1}{2} A_{44} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 + A_{45} \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4 \\
& + \frac{1}{2} A_{55} \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4 - \frac{4}{h^2} D_{44} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 - \frac{8}{h^2} D_{45} \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4 \\
& + \frac{8}{h^4} F_{44} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 + \frac{16}{h^4} F_{45} \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4 + \frac{8}{h^4} F_{55} \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4 - \frac{4}{h^2} D_{55} \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4. \\
\Gamma_i^{mnij} & = -\frac{4}{3h^2} F_{12} \Omega_{20}^5 \Delta_{01}^5 - \frac{4}{3h^2} F_{22} \Omega_{00}^5 \Delta_{21}^5 \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{16} \Omega_{21}^5 \Delta_{00}^5 - \frac{4}{3h^2} F_{26} \Omega_{01}^5 \Delta_{20}^5 - \frac{8}{3h^2} F_{26} \Omega_{10}^5 \Delta_{11}^5 \\
& - \frac{8}{3h^2} F_{66} \Omega_{11}^5 \Delta_{10}^5 + \frac{16}{9h^4} H_{12} \Omega_{20}^5 \Delta_{01}^5 + \frac{16}{9h^4} H_{22} \Omega_{00}^5 \Delta_{21}^5 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{16} \Omega_{21}^5 \Delta_{00}^5 + \frac{32}{9h^4} H_{26} \Omega_{10}^5 \Delta_{11}^5 + \frac{16}{9h^4} H_{26} \Omega_{01}^5 \Delta_{20}^5 \\
& + \frac{32}{9h^4} H_{66} \Omega_{11}^5 \Delta_{10}^5 + A_{44} \Omega_{00}^5 \Delta_{10}^5 - \frac{8}{h^2} D_{44} \Omega_{00}^5 \Delta_{10}^5 \\
& - \frac{8}{h^2} D_{45} \Omega_{10}^5 \Delta_{00}^5 + \frac{16}{h^4} F_{44} \Omega_{00}^5 \Delta_{10}^5 + \frac{16}{h^4} F_{45} \Omega_{10}^5 \Delta_{00}^5 + A_{45} \Omega_{10}^5 \Delta_{00}^5, \\
\Gamma_i^{mnlk} & = -\frac{4}{3h^2} F_{12} \Omega_{01}^6 \Delta_{20}^6 - \frac{8}{3h^2} F_{16} \Omega_{11}^6 \Delta_{10}^6 \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{26} \Omega_{00}^6 \Delta_{21}^6 - \frac{8}{3h^2} F_{66} \Omega_{10}^6 \Delta_{11}^6 + \frac{16}{9h^4} H_{11} \Omega_{21}^6 \Delta_{00}^6 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \Omega_{01}^6 \Delta_{20}^6 + \frac{16}{9h^4} H_{16} \Omega_{20}^6 \Delta_{01}^6 + \frac{32}{9h^4} H_{16} \Omega_{11}^6 \Delta_{10}^6 \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{26} \Omega_{00}^6 \Delta_{21}^6 + \frac{32}{9h^4} H_{66} \Omega_{10}^6 \Delta_{11}^6 + A_{45} \Omega_{00}^6 \Delta_{10}^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{55}\Omega_{10}^6\Delta_{00}^6 - \frac{8}{h^2}D_{45}\Omega_{00}^6\Delta_{10}^6 + \frac{16}{h^4}F_{45}\Omega_{00}^6\Delta_{10}^6 \\
& + \frac{16}{h^4}F_{55}\Omega_{10}^6\Delta_{00}^6 - \frac{4}{3h^2}F_{11}\Omega_{21}^6\Delta_{00}^6 - \frac{4}{3h^2}F_{16}\Omega_{20}^6\Delta_{01}^6 - \frac{8}{h^2}D_{55}\Omega_{10}^6\Delta_{00}^6.
\end{aligned} \tag{8.43}$$

Damit lässt sich das innere Potential  $\Pi_i$  anschreiben als:

$$\begin{aligned}
\Pi_i & = \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} X_{mn} X_{pq} \Gamma_i^{klkl} \\
& + \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{ijij} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} X_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{kl ij} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Gamma_i^{mnmn} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} W_{mn} Y_{pq} \Gamma_i^{mni j} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=K} \sum_{q=1}^{q=L} W_{mn} X_{pq} \Gamma_i^{m n k l}.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Mit der zusätzlichen Abkürzung

$$Q_{00}^{nq} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy \tag{8.45}$$

geht das äußere Potential  $\Pi_a$  über in folgende Form:

$$\begin{aligned}
\Pi_a & = -\lambda \frac{N_{xx}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \left[ \frac{(\psi-1)}{b} \Omega_{11}^4 Q_{00}^{nq} + \Omega_{11}^4 \Delta_{00}^4 \right] \\
& - \lambda \frac{N_{yy}^0}{2} \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Omega_{00}^4 \Delta_{11}^4 \\
& - \lambda N_{xy}^0 \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{p=1}^{p=M} \sum_{q=1}^{q=N} W_{mn} W_{pq} \Omega_{10}^4 \Delta_{01}^4.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

Führen wir außerdem noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}^{nq} & = \psi_{y2n} \psi_{y2q} |_{y=0}, \\
\Theta_{11}^{nq} & = \psi_{y2n} \psi_{y2q} |_{y=b}
\end{aligned} \tag{8.47}$$

ein, dann erhalten wir mit

$$\Gamma_s^{ijij} = \frac{1}{2} T_{00}^{mp} (k_l \Phi_{11}^{nq} + k_r \Theta_{11}^{nq}) \tag{8.48}$$

für die Federenergie  $\Pi_s$ :

$$\Pi_s = \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} \sum_{p=1}^{p=I} \sum_{q=1}^{q=J} Y_{mn} Y_{pq} \Gamma_s^{ijij}. \quad (8.49)$$

Für die Fälle 1-4 der Abb. 8.2 unter Berücksichtigung der Lastfallkombination der Abb. 8.1 werden identische Ansatzfunktionen wie bereits im Rahmen der FSDT verwendet, d.h. die Gl. (8.31)-(8.34) finden hier erneut Verwendung. Die Herleitung des Eigenwertproblems erfolgt analog zu den Ausführungen zur FSDT, und die dort angegebenen Formeln haben ebenso Gültigkeit für die Berechnung nach TSDT.

Die eingeführten Resultanten der Ansatzfunktionen sind sämtlich in Anhang 8.B für alle vier hier betrachteten Fälle detailliert angegeben.



# Kapitel 9

## Lokales Beulen mittels semi-analytischer Methoden

### 9.1 Einführung

Die bisherigen Rechenmethoden zur lokalen Stabilität beruhen sämtlich auf der Verwendung diskreter Plattenmodelle, also dem separaten Betrachten von Flansch- und Stegplatten und den darauf basierenden Plattenbeulanalysen unter Berücksichtigung elastischer Randeinspannungen. Sind diese Methoden vielfältig verwendbar, so stoßen sie in einigen Fällen durchaus an ihre Grenzen, weshalb in diesem Kapitel ein ganzheitliches Konzept entwickelt wird. Dieses beruht darauf, die Beulmoden der Flansche und Stege im Rahmen der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung als Reihenentwicklungen darzustellen, wobei die Ausführungen des Kapitels 8 hierfür die Grundlage bilden, und diese dann in einem späteren Schritt durch die Anwendung der Übergangsbedingungen zwischen Flanschen und Stegen zu vereinen. Der weitere Analyseweg besteht dann in der konsequenten Anwendung des Ritz-Verfahrens, d.h. der Betrachtung des Energiehaushalts des lokal gebeulten Stabes und der Herleitung und numerischen Lösung des zugehörigen Eigenwertproblems. Es wird sich zeigen, dass diese Methode nicht nur hochgenaue Ergebnisse im Vergleich mit begleitenden FEM-Simulationen liefert, sondern rein numerische Berechnungen um ganze Größenordnungen bezüglich des Analyseaufwands übertrifft. Die hier dargestellte Analyseverfahren wird für doppelsymmetrische I-Träger unter zentrischem Druck hergeleitet, lässt sich aber prinzipiell auf beliebige Querschnittsformen übertragen, was hier aber ohne weitere Darstellung bleibt.

### 9.2 Analysemethode

#### 9.2.1 Ansatzfunktionen

Wir betrachten einen doppelsymmetrischen I-Träger (Länge  $a$ ) unter einachsiger und zentrisch angreifender Drucklast, die sich gleichmäßig in Form eines Kraftflusses  $N_{xx}^0$  auf sämtliche Segmente des Faserverbund-Trägers verteilt. Es wird hier der Einfachheit halber angenommen, dass Steg und Flansche aus identischen Laminaten aufgebaut sind. Die vier identischen Flanschlamine weisen die Breite  $b$  auf, der Steg habe die Höhe  $h$ . Es sei

hier vorausgesetzt, dass alle Laminare symmetrische Aufbauten aufweisen, aber ansonsten beliebige und vor allem nicht-orthotrope Layups haben können.

Nach den bisher gesammelten Erfahrungen im Rahmen der diskreten Plattenanalyse kann festgehalten werden, dass das Beulverhalten des Steg-Laminats durch zwei Grenzfälle ausgezeichnet wird (Abb. 9.1). Der untere Grenzfall ist ein Steg-Laminat, das an allen vier Rändern gelenkig gelagert ist (Abb. 9.1, links), wohingegen der obere Grenzfall durch ein Laminat ausgezeichnet wird, das an den unbelasteten Rändern fest eingespannt ist (Abb. 9.1, rechts). Für das allseitig gelenkig gelagerte Steg-Laminat (abgekürzt mit 'ss')

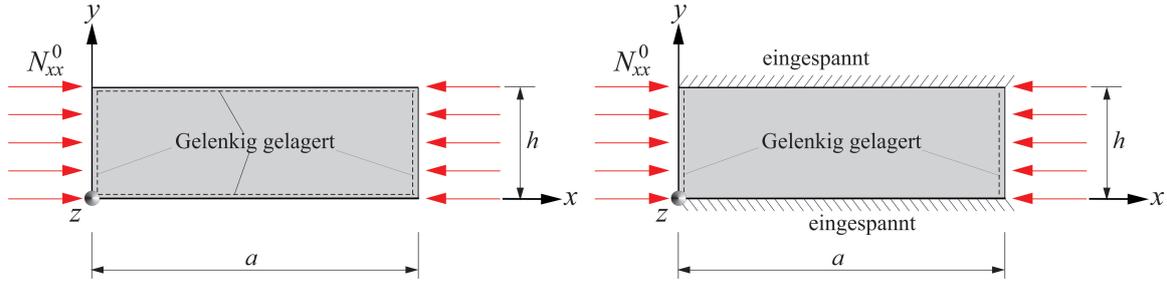


Abb. 9.1: Grenzfälle für das Steg-Laminat: allseitige gelenkige Lagerung (links), feste Einspannung der unbelasteten Ränder (rechts).

wird die folgende Reihenentwicklung für die Beulfreiheitsgrade angenommen:

$$\begin{aligned}
 w_0^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} W_{mn}^{ss} w_{1m}^{ss}(x) w_{2n}^{ss}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} W_{mn}^{ss} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \\
 \psi_x^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} X_{mn}^{ss} \psi_{x1m}^{ss}(x) \psi_{x2n}^{ss}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} X_{mn}^{ss} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \\
 \psi_y^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} Y_{mn}^{ss} \psi_{y1m}^{ss}(x) \psi_{y2n}^{ss}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} Y_{mn}^{ss} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right). \tag{9.1}
 \end{aligned}$$

Die Ansatzfunktionen  $w_{1m}^{ss}(x)$ ,  $\psi_{x1m}^{ss}$ ,  $\psi_{y1m}^{ss}(x)$ ,  $w_{2n}^{ss}(y)$ ,  $\psi_{x2n}^{ss}(y)$ ,  $\psi_{y2n}^{ss}(y)$  werden gegenwärtig in Form von einfachen trigonometrischen Funktionen entwickelt (s. dazu auch Kapitel 8), die die gegebenen geometrischen Randbedingungen erfüllen. Die Größen  $W_{mn}^{ss}$ ,  $X_{mn}^{ss}$ ,  $Y_{mn}^{ss}$  sind die eingangs unbekanntenen Ansatzkoeffizienten. Die Ansatzgrade werden durch die ganzen Zahlen  $M^{ss}$ ,  $N^{ss}$ ,  $K^{ss}$ ,  $L^{ss}$ ,  $I^{ss}$  und  $J^{ss}$  beschrieben.

Auf ähnliche Art und Weise wird die Beulform des eingespannten Steg-Laminats entwickelt (abgekürzt als 'fc'. s. dazu ebenfalls Kapitel 8):

$$\begin{aligned}
 w_0^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} W_{mn}^{fc} w_{1m}^{fc}(x) w_{2n}^{fc}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn}^{fc} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{h}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{h}\right) \right], \\
 \psi_x^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=K^{fc}} \sum_{n=1}^{n=L^{fc}} X_{mn}^{fc} \psi_{x1m}^{fc}(x) \psi_{x2n}^{fc}(y) \\
 &= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn}^{fc} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{h}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{h}\right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_y^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=I^{fc}} \sum_{n=1}^{n=J^{fc}} Y_{mn}^{fc} \psi_{y1m}^{fc}(x) \psi_{y2n}^{fc}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn}^{fc} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \left[ \cos\left(\frac{(n-1)\pi y}{h}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi y}{h}\right) \right].
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Das tatsächliche Beulverhalten wird sich stets zwischen den beiden so beschriebenen Grenzfällen bewegen, so dass die beiden Reihenentwicklungen (9.1) und (9.2) aufaddiert werden und damit die Beulform des Steg-Laminats beschreiben:

$$\begin{aligned}
w_0 &= w_0^{ss} + w_0^{fc}, \\
\psi_x &= \psi_x^{ss} + \psi_x^{fc}, \\
\psi_y &= \psi_y^{ss} + \psi_y^{fc}.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Ganz ähnlich werden die Reihenentwicklungen für das Flansch-Laminat aufgestellt (s. dazu auch die Ausführungen in Kapitel 8). Für das gelenkig gelagerte Flansch-Laminat (Abb. 9.2, links) gelte:

$$\begin{aligned}
w_0^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} W_{mn}^{ss} w_{1m}^{ss}(x) w_{2n}^{ss}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} W_{mn}^{ss} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^n, \\
\psi_x^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} X_{mn}^{ss} \psi_{x1m}^{ss}(x) \psi_{x2n}^{ss}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} X_{mn}^{ss} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^n, \\
\psi_y^{ss} &= \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} Y_{mn}^{ss} \psi_{y1m}^{ss}(x) \psi_{y2n}^{ss}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} Y_{mn}^{ss} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^n.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Für das Flansch-Laminat mit einem eingespannten unbelasteten Rand (Abb. 9.2, rechts) wird folgende Reihenentwicklung vorgesehen:

$$\begin{aligned}
w_0^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} W_{mn}^{fc} w_{1m}^{fc}(x) w_{2n}^{fc}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn}^{fc} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}, \\
\psi_x^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=K^{fc}} \sum_{n=1}^{n=L^{fc}} X_{mn}^{fc} \psi_{x1m}^{fc}(x) \psi_{x2n}^{fc}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=K} \sum_{n=1}^{n=L} X_{mn}^{fc} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}, \\
\psi_y^{fc} &= \sum_{m=1}^{m=I^{fc}} \sum_{n=1}^{n=J^{fc}} Y_{mn}^{fc} \psi_{y1m}^{fc}(x) \psi_{y2n}^{fc}(y) \\
&= \sum_{m=1}^{m=I} \sum_{n=1}^{n=J} Y_{mn}^{fc} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Wie auch beim Steg-Laminat werden die beiden Reihenentwicklungen (9.4) und (9.5) aufaddiert (s. Gl. (9.3)).

## 9.2.2 Energieformulierung

Das nachfolgend dargestellte Rechenverfahren nutzt die Ritz-Methode in Verbindung mit dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials  $\Pi$  des lokal gebeulten Trä-

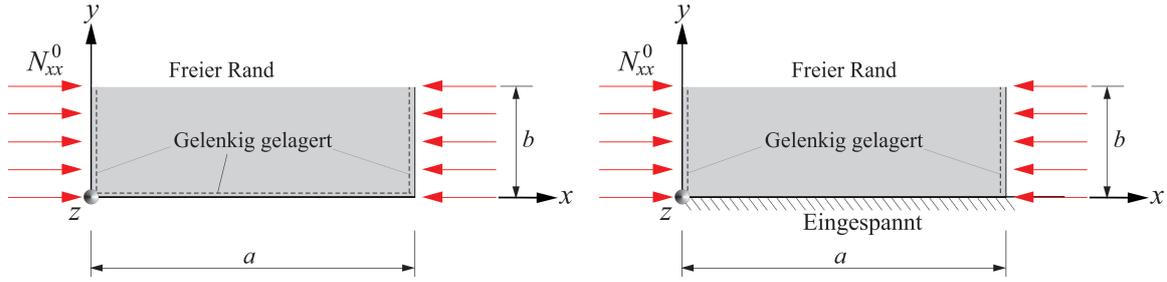


Abb. 9.2: Grenzfälle für das Flansch-Laminat: dreiseitige gelenkige Lagerung (links), feste Einspannung des unbelasteten Randes bei  $y = 0$  (rechts).

gers. Das elastische Gesamtpotential  $\Pi$  besteht dabei zunächst aus zwei Anteilen, nämlich dem inneren Potential  $\Pi_i$  und dem äußeren Potential  $\Pi_a$ .

Das innere Potential  $\Pi_i$  sowohl des Steg-Laminats als auch der Flansch-Laminats lautet ganz allgemein:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (9.6)$$

Mit Hilfe der kinematischen Beziehungen bzgl. des infinitesimalen Verzerrungstensors und nach Durchführen der Integration hinsichtlich der Dickenrichtung  $z$  erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^a \left[ N_{xx}^0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy}^0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ & + M_{xx}^0 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_{yy}^0 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy}^0 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ & - \frac{4P_{xx}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{4P_{yy}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \frac{4P_{xy}}{3t^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + Q_y \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + Q_x \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ & \left. + \frac{4R_y}{t^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{4R_x}{t^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (9.7)$$

wobei die Größe  $l$  im Falle des Steges den Wert  $l = h$  bzw. im Falle des Flansches den Wert  $l = b$  annimmt. Einsetzen des Konstitutivgesetzes nach der Schubdeformationstheorie 3. Ordnung unter Berücksichtigung der Symmetrie der Laminate (was auf  $B_{ij} = 0$  und  $E_{ij} = 0$  führt) ergibt dann:

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^a \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right. \\ & + 2D_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ & - \frac{8}{3t^2} F_{11} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right] - \frac{8}{3t^2} F_{22} \left[ \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] \\ & - \frac{8}{3t^2} F_{12} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ & \left. - \frac{8}{3t^2} F_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{3t^2} F_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& - \frac{8}{3t^2} F_{66} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] \\
& + \frac{16}{9t^4} H_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{16}{9t^4} H_{22} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\
& + \frac{32}{9t^4} H_{12} \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\
& + \frac{32}{9t^4} \left[ H_{16} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{26} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
& + \frac{16}{9t^4} H_{66} \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + 4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& + A_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& + 2A_{45} \left[ \psi_x \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \\
& - \frac{8}{t^2} D_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{8}{t^2} D_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& - \frac{16}{t^2} D_{45} \left( \psi_y \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{16}{t^2} F_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{16}{t^4} F_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
& + \frac{32}{t^4} F_{45} \left( \psi_x \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \} dx dy. \tag{9.8}
\end{aligned}$$

Einsetzen der Ansatzfunktionen für die Steg- und Flansch-Lamine führt dann auf einen Ausdruck, der recht umfangreich ausfällt. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit ist dieser im Anhang 9.A im Detail dargestellt.

Das Potential  $\Pi_a$  der aufgebrachten Belastung  $N_{xx}^0$  lautet sowohl für das Steg-Laminat als auch für die Flansch-Lamine:

$$\Pi_a = -\frac{1}{2} \lambda \int_0^l \int_0^a N_{xx}^0 \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx dy, \tag{9.9}$$

worin die Größe  $\lambda$  ein Lastmultiplikator ist, der angibt, in welcher Höhe die Belastung gesteigert werden kann, bevor lokales Trägerbeulen eintritt. Der Lastmultiplikator  $\lambda$  ist das eigentliche Ziel der Berechnungen. Das äußere Potential  $\Pi_a$  ist für eine bessere Lesbarkeit dieses Kapitels im Anhang 9.B ausführlich dargestellt.

Das elastische Gesamtpotential  $\Pi$  des lokale gebeulenen Trägers ergibt sich aus der Summe der beiden Anteile  $\Pi_i$  und  $\Pi_a$ :

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a, \tag{9.10}$$

wobei beide Anteile  $\Pi_i$  und  $\Pi_a$  aus Anteilen des Steg-Laminats und der Flansch-Laminat bestehen:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \Pi_{i,\text{Steg}}^1 + \sum_{k=2}^{k=5} \Pi_{i,\text{Flansch}}^k, \\ \Pi_a &= \Pi_{a,\text{Steg}}^1 + \sum_{k=2}^{k=5} \Pi_{a,\text{Flansch}}^k.\end{aligned}\quad (9.11)$$

Die hochgestellten Indices 1, 2, ..., 5 zeigen dabei die Nummer des betrachteten Segments an (vgl. auch Abb. 9.3). Die Auswertung der Integrale der Ansatzfunktionen für Steg und Flansche ist ausführlich in den Anhängen 9.C, 9.D und 9.E gezeigt.

Der Beulbeginn wird durch indifferentes Gleichgewicht ausgezeichnet. In diesem Zustand nimmt das elastische Gesamtpotential  $\Pi$  ein Minimum an, was gleichbedeutend mit der folgenden Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation von  $\Pi$  ist:

$$\delta \Pi = 0. \quad (9.12)$$

Da die mathematische Form der Beulmoden bereits vollständig durch die gewählten Ansatzfunktionen festgelegt wurde, sind die einzigen Größen, die überhaupt noch einer Variation zugänglich sind, die Koeffizienten  $W_{mn}$ ,  $X_{mn}$ ,  $Y_{mn}$ . Der Variationsausdruck (9.12) geht damit in die sog. Ritzschen Gleichungen über:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y_{mn}} = 0. \quad (9.13)$$

Auswerten führt auf ein lineares Eigenwertproblem der folgenden Form:

$$\left[ \underline{\underline{K}}_i - \lambda \underline{\underline{K}}_a \right] \underline{W} = \underline{0} \quad (9.14)$$

Hierin ist  $\underline{\underline{K}}_i$  die sog. Steifigkeitsmatrix, und  $\underline{\underline{K}}_a$  ist die sog. geometrische Steifigkeitsmatrix. Der Lastmultiplikator  $\lambda$  stellt dann den Eigenwert dar, wohingegen der Vektor  $\underline{W}$  den zugehörigen Eigenvektor auszeichnet. Die Belegung der Matrizen  $\underline{\underline{K}}_i$  und  $\underline{\underline{K}}_a$  ist detailliert im Anhang 9.F gezeigt.

Das Eigenwertproblem (9.14) erfordert eine numerische Auswertung, was schnell und effizient mit Hilfe eines beliebigen Mathematik-Programmpakets erfolgen kann.

### 9.2.3 Übergangsbedingungen

Bislang wurden die Ansätze zur Beschreibung der Beulmoden sowie die entsprechenden Beiträge zum elastischen Gesamtpotential jeweils separat für das Steg-Laminat und die Flansch-Laminat betrachtet. Diese müssen nun durch geeignete Übergangsbedingungen miteinander kombiniert werden, um zu einer Rechenmethode für das lokale Beulen eines Trägers unter zentrischem Druck zu gelangen. Zu diesem Zweck werden lokale Umlaufachsen  $s_1, s_2, \dots, s_5$  wie in Abb. 9.3 gezeigt eingeführt. Für den Fall des doppelt symmetrischen I-Trägers gelten dann die folgenden Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned}\psi_{y,1}(s_1 = 0) &= \psi_{y,2}(s_2 = 0), \\ \psi_{y,1}(s_1 = 0) &= \psi_{y,3}(s_3 = 0),\end{aligned}$$

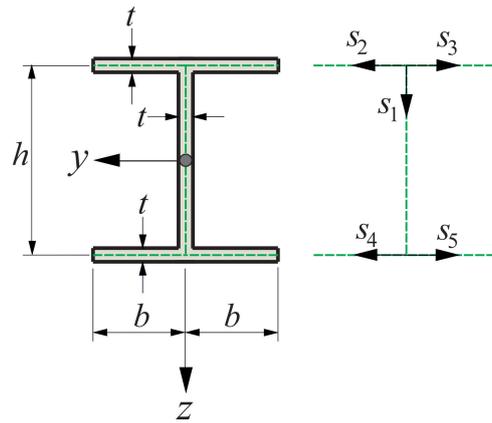


Abb. 9.3: Lokale Umlaufachsen  $s_1, s_2, \dots, s_5$ .

$$\begin{aligned} \psi_{y,1}(s_1 = h) &= \psi_{y,4}(s_4 = 0), \\ \psi_{y,1}(s_1 = h) &= \psi_{y,5}(s_5 = 0), \\ \psi_{y,1}(s_1 = 0) &= -\psi_{y,1}(s_1 = h). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Diese Bedingungen lassen sich mit den gewählten Ansätzen jedoch nicht exakt erfüllen, so dass eine punktweise Formulierung gewählt wird, bei der die Übergangsbedingungen an einer beliebigen Anzahl von Stützstellen ausgewertet und mittels Lagrangescher Multiplikatoren in das elastische Potential  $\Pi$  mit einfließen.

Sei  $f(\underline{x})$  eine Funktion des Vektors  $\underline{x}$ , wobei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die sog. Designvariablen seien. Es werde das Minimum der Funktion  $f(\underline{x})$  gesucht, so dass für  $\underline{x} = \underline{x}^*$  gilt:  $f(\underline{x}^*) = \text{Min}$ . Der Vektor  $\underline{x}$  unterliege zudem insgesamt  $q$  Gleichheitsrestriktionen  $h_k(\underline{x})$ , so dass:

$$h_k(\underline{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, q. \tag{9.16}$$

Damit ist die sog. Lagrangesche Funktion mit durch Lagrangesche Multiplikatoren gewichtete Gleichheitsrestriktionen zu betrachten:

$$L(\underline{x}, \underline{\gamma}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{k=q} \gamma_k h_k(\underline{x}); \tag{9.17}$$

Die Lagrangesche Funktion  $L(\underline{x}, \underline{\gamma})$  nimmt einen Stationärwert an, wenn die Optimalvektoren  $\underline{x}^*$  und  $\underline{\gamma}^*$  vorliegen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\underline{x}^*, \underline{\gamma}^*)}{\partial x_i} &= \frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=q} \gamma_k \frac{\partial h_k(\underline{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial L(\underline{x}^*, \underline{\gamma}^*)}{\partial \gamma_k} &= h_k(\underline{x}^*) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Angewandt auf das vorliegende Beulproblem entspricht die Funktion  $f(\underline{x})$  genau dem elastischen Gesamtpotential, also:

$$f(\underline{x}) = \Pi_i + \Pi_a. \tag{9.19}$$

Der zusätzlich auftretende Term in (9.17), der die Gleichheitsrestriktionen beinhaltet, kann dann als ein weiterer Anteil in  $\Pi$  aufgefasst werden, den wir als  $\Pi_c$  bezeichnen

wollen (c aus dem englischen Begriff 'constraint' für eine Restriktion):

$$\Pi_c = \sum_{k=1}^{k=5} \gamma_k h_k(\underline{x}), \quad (9.20)$$

so dass:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a + \Pi_c, \quad (9.21)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \gamma_1 [\psi_{y,1}(s_1 = 0) - \psi_{y,2}(s_2 = 0)] + \gamma_2 [\psi_{y,1}(s_1 = 0) - \psi_{y,3}(s_3 = 0)] \\ &+ \gamma_3 [\psi_{y,1}(s_1 = h) - \psi_{y,4}(s_4 = 0)] + \gamma_4 [\psi_{y,1}(s_1 = h) - \psi_{y,5}(s_5 = 0)] \\ &+ \gamma_5 [\psi_{y,1}(s_1 = 0) + \psi_{y,1}(s_1 = h)] \end{aligned} \quad (9.22)$$

Gegenwärtig wird eine punktweise Auswertung der Übergangsbedingungen herangezogen. Hierzu wird die Trägerlänge  $a$  in eine Anzahl  $P$  äquidistanter Intervalle der Länge  $\frac{a}{P}$  aufgeteilt. Dadurch entstehen insgesamt  $P - 1$  Stützstellen bei  $x_1 = \frac{a}{P}$ ,  $x_2 = \frac{2a}{P}, \dots, x_{P-1} = \frac{(P-1)a}{P}$ , an denen die Auswertung der Übergangsbedingungen durchgeführt wird. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \sum_{p=1}^{p=P-1} \{ \gamma_{1,p} [\psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = 0) - \psi_{y,2}(x = \frac{pa}{P}, s_2 = 0)] \\ &+ \gamma_{2,p} [\psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = 0) - \psi_{y,3}(x = \frac{pa}{P}, s_3 = 0)] \\ &+ \gamma_{3,p} [\psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = h) - \psi_{y,4}(x = \frac{pa}{P}, s_4 = 0)] \\ &+ \gamma_{4,p} [\psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = h) - \psi_{y,5}(x = \frac{pa}{P}, s_5 = 0)] \\ &+ \gamma_{5,p} [\psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = 0) + \psi_{y,1}(x = \frac{pa}{P}, s_1 = h)] \}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Das gegenwärtige Minimierungsproblem beinhaltet daher insgesamt  $5(P-1)$  Lagrangesche Multiplikatoren  $\gamma_{1p}, \dots, \gamma_{5p}$ , die in dem Eigenvektor  $\underline{W}$  als zusätzliche Unbekannte auftreten. Das Eigenwertproblem, das das lokale Beulen beschreibt, muss daher erweitert werden zu:

$$\left[ \underline{\underline{K}}_i + \underline{\underline{K}}_c - \lambda \underline{\underline{K}}_a \right] \underline{W} = \underline{0}, \quad (9.24)$$

wobei die Matrix  $\underline{\underline{K}}_c$  die Beiträge aus den Gleichheitsrestriktionen beinhaltet. Hierzu finden sich in Anhang 9.F weitere Ausführungen.

## 9.3 Ergebnisse und Diskussion

### 9.3.1 Konvergenzanalyse

Um die grundlegenden Eigenschaften der hier entwickelten Rechenmethode zu illustrieren, werden drei aus [136] entnommene doppelt-symmetrische I-Träger mit orthotropen Lagenaufbauten betrachtet. Die zugrundeliegenden elastischen Eigenschaften der Einzelschichten für einen typischen kohlenstofffaserverstärkten Kunststoff lauten in allen Fällen  $E_{11} = 155000\text{MPa}$ ,  $E_{22} = 10000\text{MPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4500\text{MPa}$ ,  $G_{23} = 3700\text{MPa}$ ,

$\nu_{12} = 0,35$ , und alle betrachteten Querschnitte weisen die Steghöhe  $h = 100\text{mm}$  auf. I-Träger 1 weist in Steg und Flanschen insg. 73 Schichten mit einer Gesamtdicke von  $t = 9,125\text{mm}$  auf, der Lagenaufbau lautet  $[(90/0)_{18}/90/(0/90)_{18}]$ . I-Träger 2 besteht in Flanschen und Steg aus 98 Schichten mit der Gesamtdicke  $t = 12,25\text{mm}$  und dem Lagenaufbau  $[(90/0)_{24}/90]_S$ , und I-Träger 3 weist 130 Schichten (Gesamtdicke  $t = 16,25\text{mm}$ , Layup  $[(90/0)_{32}/90]_S$ ) auf.

Es wird zunächst das Verhalten der Beullösung bezüglich der Anzahl  $P - 1$  der Stützstellen über die Trägerlänge  $a$  zur Auswertung der Übergangsbedingungen betrachtet. Abb. 9.4 zeigt Ergebnisse für die Beullast  $N_{xx}^0$  des I-Trägers 1, aufgetragen über die Trägerlänge  $a$ . Gezeigt sind hier die Ergebnisse für  $P - 1 = 4, 5, 6, 7$  Stützstellen. Die Ergebnisse

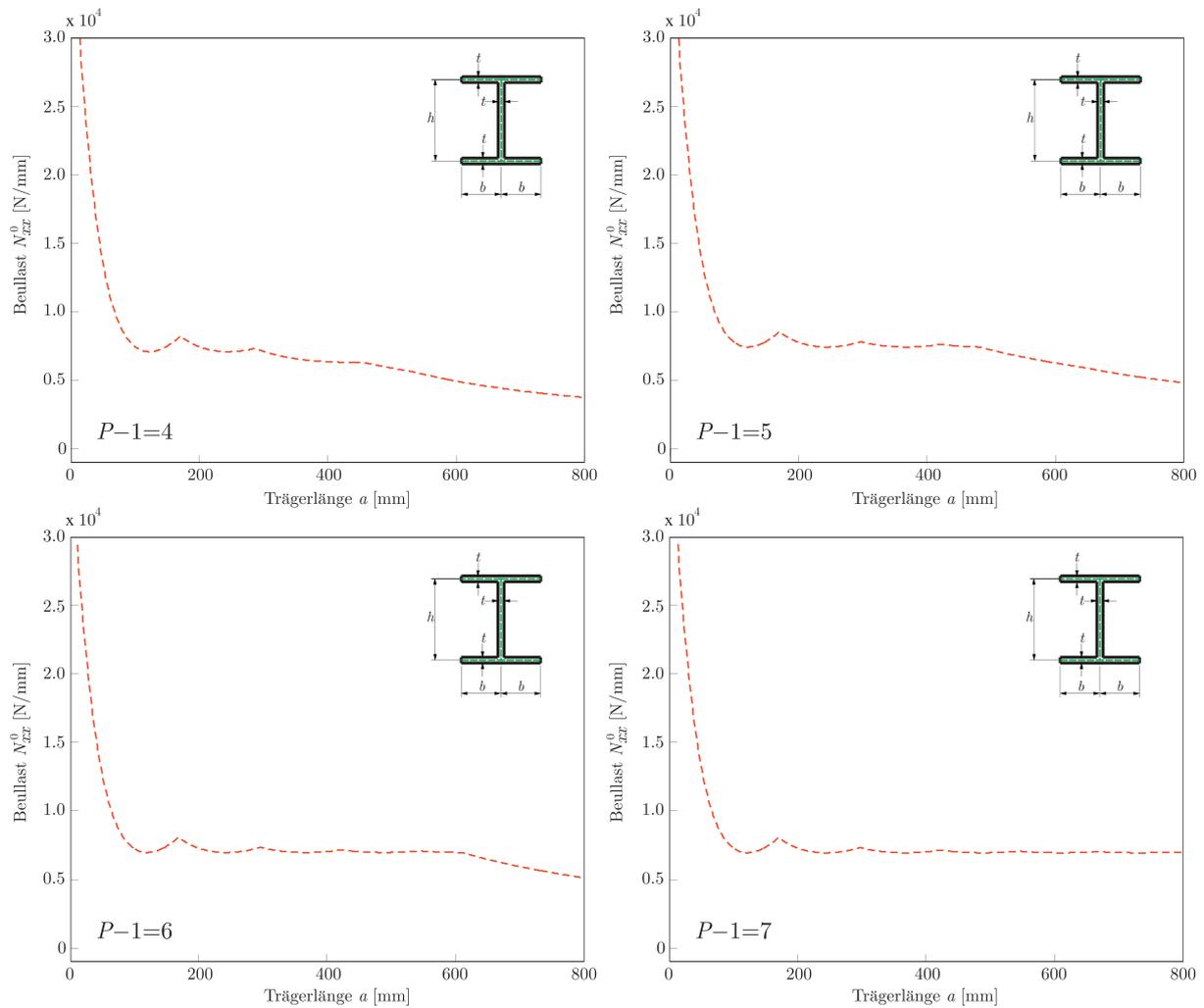


Abb. 9.4: Beullast  $N_{xx}^0$  für I-Träger 1, aufgetragen über die Trägerlänge  $a$ , für verschiedene Anzahlen  $P - 1$  von Stützstellen ( $h=100\text{mm}$ ,  $b=40\text{mm}$ ).

zeigen, dass es von großer Wichtigkeit ist, eine hinreichende Anzahl von Stützstellen zuzuordnen, um sinnvolle Ergebnisse zu erlangen. Für das gegebene lokale Beulproblem sind typische sog. Girlandenkurven  $N_{xx}^0(a)$  zu erwarten, die für sehr kurze Trägerlängen  $a$  sehr hohe Werte aufzeigen, wohingegen die lokalen Maxima der Girlandenkurven mit steigender Trägerlänge immer mehr abflachen und sich die Kurven für sehr hohe Trägerlängen  $a$  einem asymptotischen Grenzwert annähern. Dies lässt angesichts der Ergebnisse der Abb. 9.4 den Schluss zu, dass eine nicht hinreichende Anzahl  $P - 1$  von Stützstellen

das System rechnerisch 'zu weich' abbildet, wodurch die Übergangsbedingungen nur unzureichend Einfluss finden, wenn eine gewisse Trägerlänge  $a$  überschritten wird und die Beulkurven  $N_{xx}^0(a)$  schlagartig abfallen. Für den hier exemplarisch betrachteten I-Träger 1 reichten bereits  $P - 1 = 7$  Stützstellen aus, um für alle betrachteten Trägerlängen  $a$  eine stichhaltige Beulkurve zu generieren. Ähnliche Ergebnisse ergaben sich auch für alle anderen betrachteten Trägergeometrien, was hier aber ohne weitere Darstellung bleibt.

Es ist desweiteren von großer Wichtigkeit zu betrachten, welche Ansatzgrade  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $I$  und  $J$  für auskonvergierte Ergebnisse für die Beullast  $N_{xx}^0$  notwendig sind. Da die hier betrachteten Lagenaufbauten der Lamine ideal-orthotrop sind und auch bei praxisrelevanten Laminaten der Einfluss der Biege-Drill-Kopplung als sehr gering angenommen werden kann (selbst bei Winkelverbunden wird der Einfluss dieses Koppeleffekts in den Hintergrund rücken) reicht bezüglich der Längsrichtung eine einzige trigonometrische Funktion mit einer klar definierten Wellenzahl zur Beschreibung des Beulmodus aus. Das Auffinden der korrekten Terme  $M$ ,  $K$ ,  $I$  ist damit kein Problem der Konvergenz, sondern wird vielmehr ausschließlich durch die geometrischen Abmessungen sowie die Orthotropieparameter der Lamine bestimmt. Für alle hier betrachteten Fälle reichten  $M = K = I = 8$  Ansatzfunktionen in allen Fällen aus. Diese Werte müssen jedoch je nach betrachteter Trägersituation angepasst werden.

Die Ansatzgrade  $N$ ,  $L$ ,  $J$ , die die Anzahlen der Ansatzfunktionen in Querrichtung  $y$  beschreiben, unterscheiden sich für Flansche und Steg. Konvergenzstudien bezüglich der Flansche haben gezeigt, dass bereits eine Anzahl von  $N = L = J = 1$  ausreichend ist, um hochgenaue Ergebnisse zu generieren. Außerdem zeigte sich, dass die Ergebnisse sehr schnell divergieren, sobald höhere Werte angesetzt werden, was ein typisches Verhalten bei Beulproblemen ist, wenn Polynome zur Approximation der Beulmoden verwendet und mehr Terme als tatsächlich notwendig angesetzt werden. Dies entspricht also einem reinen Kippmodus der Flansche und ist auch rein anschaulich ein stichhaltiges Ergebnis. Bezüglich der Steg-Lamine konnte gezeigt werden, dass sich bereits mit  $N = L = J = 2$  konvergente Ergebnisse einstellen. Dies betont bereits an dieser Stelle die große Effizienz der hier entwickelten Methode.

### 9.3.2 Ergebnisse für doppelt-symmetrische I-Träger

Um die Qualität der hier hergeleiteten Rechenmethode zu verifizieren wurden begleitende FEM-Simulationen unter Verwendung des Software-Pakets Abaqus durchgeführt. Das verwendete FEM-Modell mit 8-Knoten-Schalenelementen mit reduzierter Integration ist in Abb. 9.5 dargestellt. Die Netzgüte wurde durch Konvergenzanalysen sichergestellt, was hier aber ohne Darstellung bleibt.

Ergebnisse für die lokale Beullast  $N_{xx}^0$ , aufgetragen über die Trägerlänge  $a$ , sind für die I-Träger 1, 2 und 3 in den Abb. 9.6-9.8 gezeigt. Alle hier untersuchten Träger weisen Segmente mit identischen Lagenaufbauten und Dicken auf, die nicht mehr als strikt dünnwandig zu klassifizieren sind, was die Verwendung einer Laminattheorie höherer Ordnung erzwingt. Die Ergebnisse der gegenwärtigen Methode sind als gestrichelte rote Linien gezeigt, und die FEM-Ergebnisse sind als durchgehende schwarze Linien gezeigt. Die bereits erwähnten Grenzfälle der Steg- und Flansch-Lamine, generiert mit Hilfe des Ritz-Verfahrens (s. Kapitel 8), sind für eine bessere Interpretierbarkeit der Ergebnisse ebenfalls

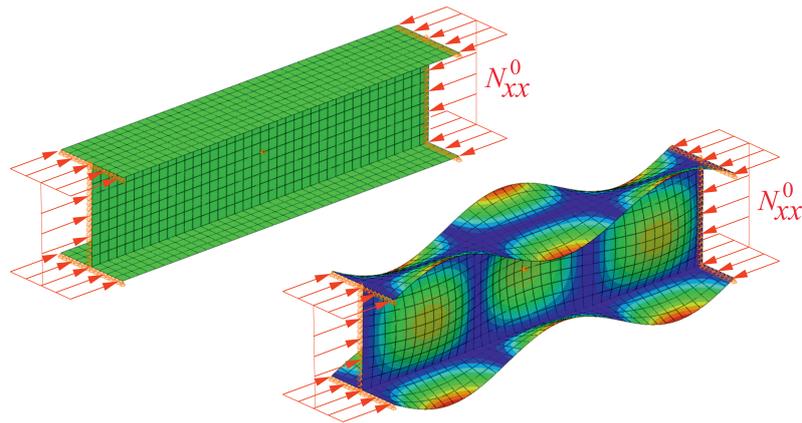


Abb. 9.5: Das FEM-Modell (links) und ein typischer lokaler Beulmodus (rechts).

gezeigt. Zudem findet sich für jeden Fall der korrespondierende maßgebliche globale Stabilitätsfall, was hier stets in einem Biegeknicken des Trägers resultierte.

Die Ergebnisse der Abb. 9.6 zeigen, dass sich für weite Bereiche der Trägerlänge  $a$  eine sehr gute Übereinstimmung der FEM-Ergebnisse und der Ergebnisse nach der gegenwärtigen Methode ergibt. Dies ist ein sehr zufriedenstellendes Ergebnis, zeigt es doch die Verlässlichkeit der hier neu entwickelten Methode. Offenbar strebt die Beullast  $N_{xx}^0(a)$  für sehr kleine Trägerlänge  $a$  gegen unendlich, was ein erwartetes und typisches Ergebnis für derartige Beulprobleme ist. Es ist erwähnenswert, dass die gegenwärtige Methode auf eine kontinuierliche Beulkurve  $N_{xx}^0(a)$  führt, wohingegen die FEM-Simulation hier auf nicht stichhaltige Ergebnisse führt. Die Beulkurve  $N_{xx}^0(a)$  nach der gegenwärtigen

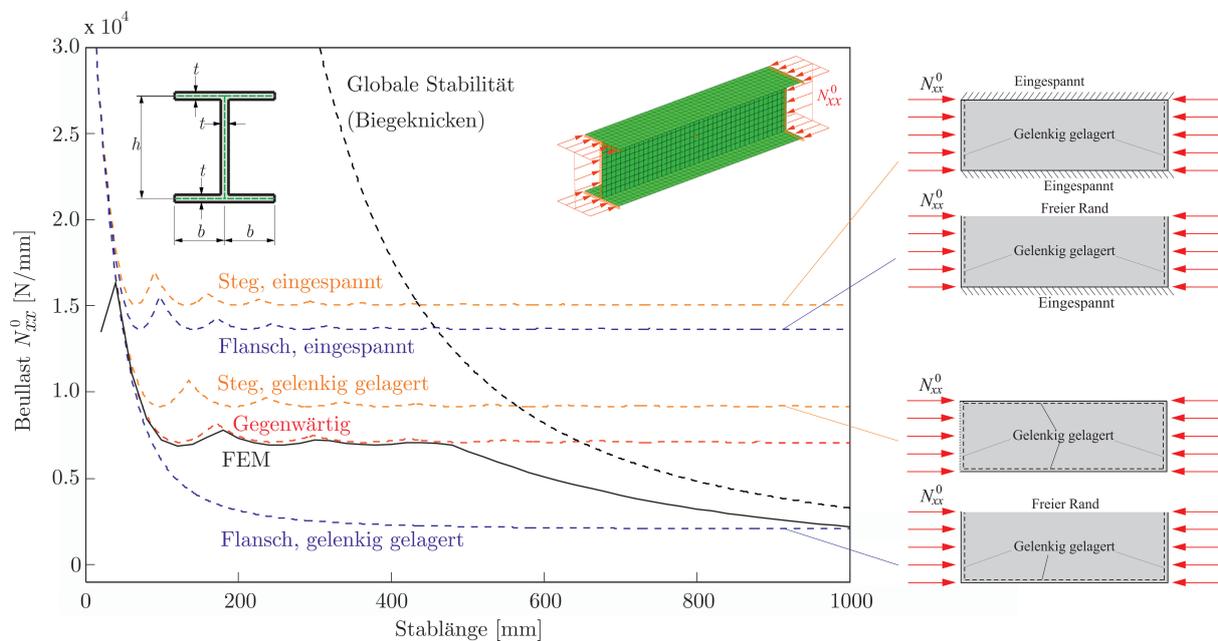


Abb. 9.6: Ergebnisse für I-Träger 1 mit dem Lagenaufbau  $[(90/0)_{18}/90/(0/90)_{18}]$ ,  $b/h=0,40$ .

Methode weist über  $a$  mehrere lokale Maxima auf, die auf Änderungen des Beulmodus hinweisen und die immer weiter abflachen, je höher  $a$  wird. Für hinreichend hohe Werte von  $a$  flacht die Kurve vollständig ab und nähert sich einem asymptotischen Grenzwert

an. Die Ergebnisse nach der FEM-Simulation folgen diesem Verlauf in weiten Teilen, jedoch zeigt es sich, dass ab etwa  $a = 480\text{mm}$  ein signifikantes Abfallen der Beullast  $N_{xx}^0(a)$  zu beobachten ist, was durch die gegenwärtige Methode jedoch nicht vorhergesagt wird. Eine Studie der sich einstellenden numerischen Beulmoden offenbart dann auch, dass für  $a > 480\text{mm}$  sowohl globale als auch lokale Moden simultan auftreten, d.h. es liegt ein Problem der Gesamtstabilität vor. Dies ist durch die gegenwärtige Methode nicht abbildbar, was die Diskrepanzen zwischen der FEM und dem hier entwickelten Verfahren erklärt. Für  $a < 480\text{mm}$  hingegen prognostiziert auch die FEM ein rein lokales Beulverhalten, und die Übereinstimmung ist hervorragend. Es ist hier wichtig herauszustellen, dass die Beullast im Falle der Gesamtstabilität geringer ausfällt als die Verzweigungslasten, die sich bei strikt getrennter Betrachtung der lokalen und der globalen Stabilität ergeben würden. Die Betrachtung der Gesamtstabilität ist daher stets ein Gebot der Sicherheit, muss aber zukünftigen Forschungen vorbehalten bleiben. Hinsichtlich der rein lokalen Stabilität jedoch kann die gegenwärtige Methode als verifiziert angesehen werden.

Die Ergebnisse der Abb. 9.6 beinhalten außerdem die Grenzfälle gelenkig gelagerter und fest eingespannter Flansche und Stege. Ein herkömmlicher ingenieurtechnischer Ansatz, die lokale Beulanalyse eines Trägers durchzuführen, wäre die separate Betrachtung der Steg- und Flansch-Lamine, üblicherweise bei Annahme ideal gelenkiger Lagerungen. Die kleinere der beiden sich so einstellenden Beullasten würde man dann für die Bemessung des Bauteils heranziehen. Dieser Ansatz ist selbstverständlich konservativ, nimmt er doch hinsichtlich der Stabilität den kritischsten Fall an. Im Falle des Beispiels der Abb. 9.6 wäre das der dreiseitig gelenkig gelagerte Flansch. Der Vergleich mit den Ergebnissen der gegenwärtigen Methode zeigt jedoch, dass diese sehr einfache Art der Beulanalyse unnötig konservative Ergebnisse ergibt und man damit das tatsächliche Tragvermögen eines gedrückten Trägers signifikant unterschätzt. Das ist vor allem in Bereichen, in denen der Leichtbau relevant ist, durchaus problematisch und zeigt noch einmal die hohe Wichtigkeit verbesserter Analysemethoden.

Schließlich sollte auch der notwendige rechnerische Aufwand der Analyseverfahren erwähnt werden. Die FEM-Ergebnisse der Abb. 9.6 beinhalten insgesamt 50 Datenpunkte, für deren Ermittlung etwa 4 Stunden Rechenzeit auf einem handelsüblichen PC notwendig waren. Die Ergebnisse nach dem gegenwärtigen Rechenverfahren hingegen beinhalten 1000 Datenpunkte, die innerhalb etwa einer Minute ermittelt wurden. Der Großteil der Berechnungszeit resultiert hier natürlich aus der Notwendigkeit der numerischen Lösung eines Eigenwertproblems. Neben der Qualität der Ergebnisse der gegenwärtigen Methode ist aber auch dieser offensichtliche und signifikante Vorteil bei der Berechnungszeit ein weiteres Argument für die Verwendung solcher einfacher Rechenansätze.

Die Abb. 9.7 und 9.8 zeigen Ergebnisse für die I-Träger 2 und 3. Wie schon anhand des Trägers 1 gezeigt ergibt sich auch hier ein exzellente Übereinstimmung der Ergebnisse dann, wenn es sich um ein rein lokales Beulverhalten handelt. I-Träger 3 jedoch ist ein Beispiel für einen Träger, bei dem bereits recht früh ein Gesamtstabilitätsproblem auftritt. Dies verdeutlicht noch einmal den nach wie vor bestehenden Forschungsbedarf auf diesem Gebiet.

Ergebnisse einer Parameterstudie für I-Träger 1 mit veränderlichem Verhältnis  $b/h$  sind in Abb. 9.9 gezeigt. Die gegenwärtige Methode wird hier erneut mit FEM-Simulationen verglichen. Offenbar ergibt sich hier für alle untersuchten Verhältnisse  $b/h$  eine sehr gute Übereinstimmung für diejenigen Trägerlängen, bei denen es zu einem rein lokalen Beulen

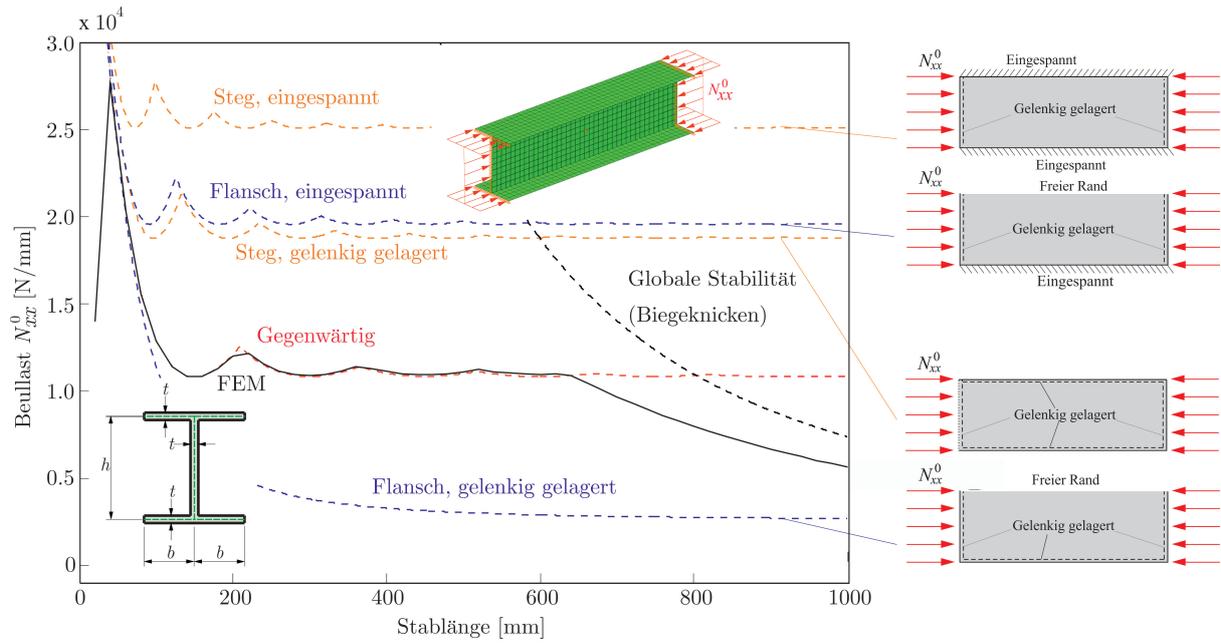


Abb. 9.7: Ergebnisse für I-Träger 2 mit dem Lagenaufbau  $[(90/0)_{24}/90]_S$ ,  $b/h=0,55$ .

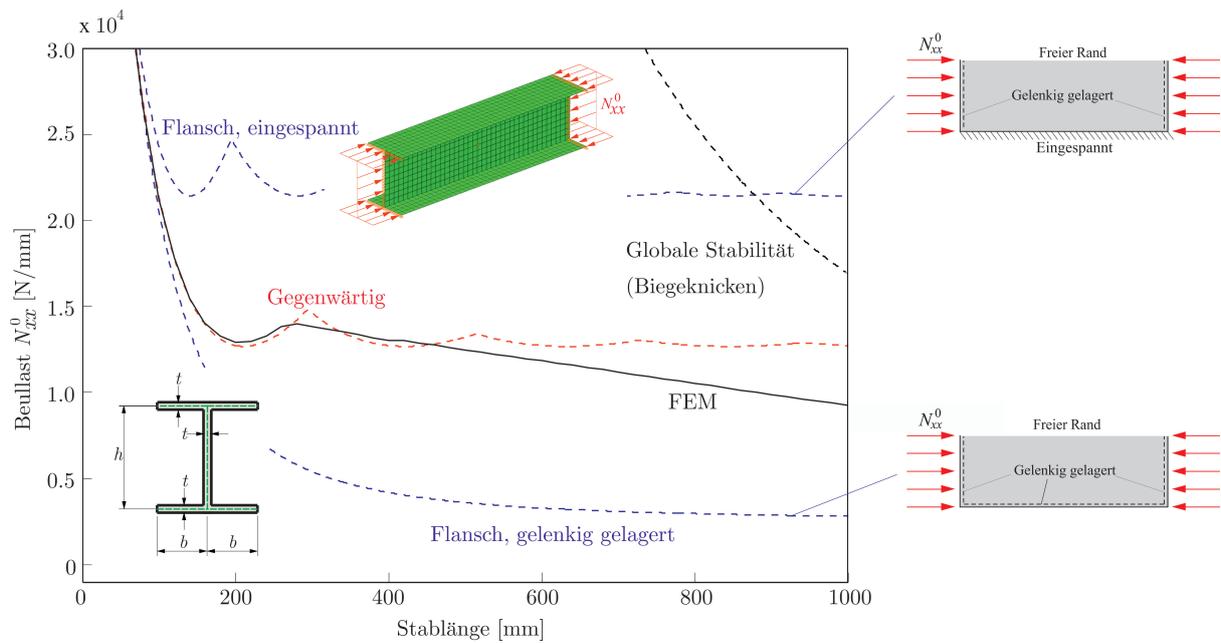


Abb. 9.8: Ergebnisse für I-Träger 3 mit dem Lagenaufbau  $[(90/0)_{32}/90]_S$ ,  $b/h=0,85$ .

kommt. Offenbar sinkt die ertragbare Last  $N_{xx}^0$  mit steigendem Verhältnis  $b/h$  an, was sich gut mit der damit auch sinkenden Beullast der Flansche erklären lässt. Desweiteren verzögert sich der Eintritt der Gesamtstabilität mit steigendem Verhältnis  $b/h$ , was sich hier aus dem damit ebenfalls ansteigenden Steiner-Anteil der Flansche und damit dem steigenden Widerstand gegen Biegeknicken erklären lässt.

Eine ähnliche Parameterstudie findet sich für I-Träger 2 in Abb. 9.10. Die Charakteristika der sich hier einstellenden Beulkurven sind identisch mit dem, was schon für Träger 1 ausgesagt wurde, so dass eine erneute Diskussion hier entfallen kann.

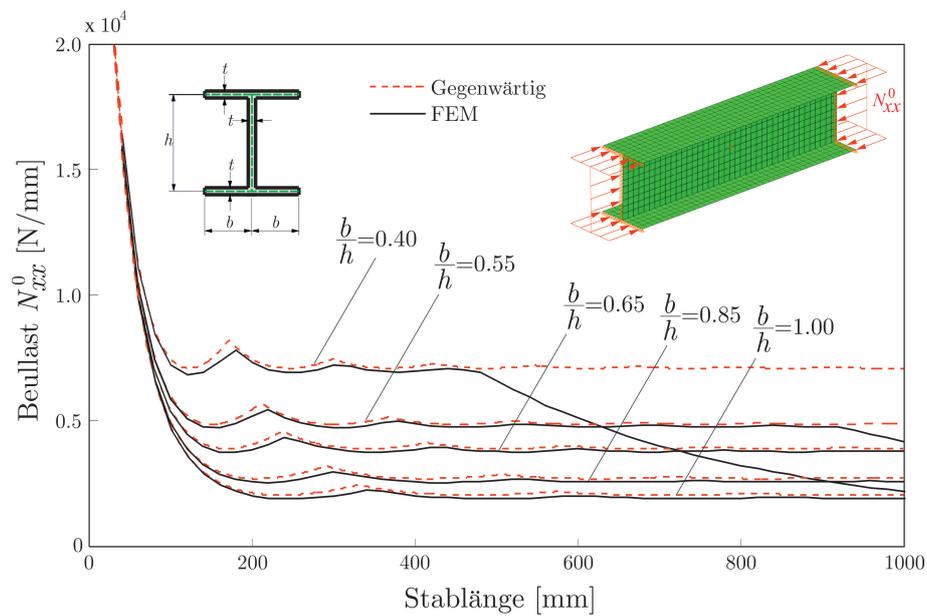


Abb. 9.9: Ergebnisse für  $N_{xx}^0(a)$  für I-Träger 1 für verschiedene Verhältnisse  $b/h$ .

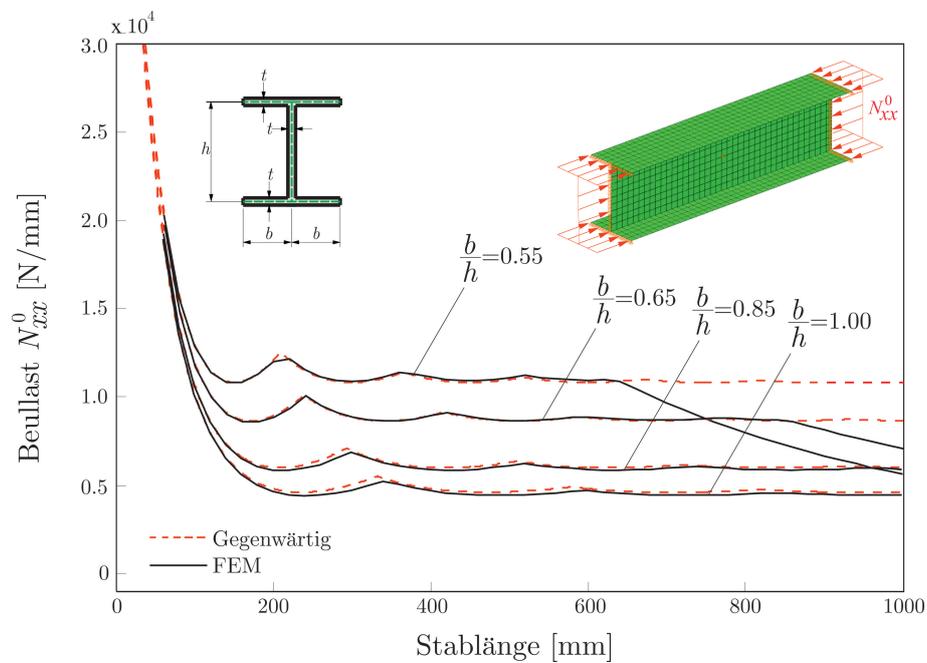


Abb. 9.10: Ergebnisse für  $N_{xx}^0(a)$  für I-Träger 2 für verschiedene Verhältnisse  $b/h$ .

# Kapitel 10

## Zusammenfassung des erreichten Forschungsstandes

Der erreichte Stand der Arbeiten kann wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Thematik der globalen Stabilität wurde vollumfänglich erfüllt, dies sowohl für Stabilitätsfälle wie Biegeknicken und Biegedrillknicken, aber auch für Kipperscheinungen. Die Untersuchungen zeigen auf, dass es möglich ist, bekannte und klassische Berechnungsformeln auch für Faserverbundträger zu verwenden, wenn die entsprechenden effektiven Querschnittskennwerte nach der Verbundtheorie angesetzt werden.
- Das Thema des lokalen Beulens wurde auf mehreren Wegen vollumfänglich angegangen. Zum einen wurden geschlossen-analytische Näherungslösungen nach der sog. Schubdeformationstheorie 3. Ordnung hergeleitet und erfolgreich verifiziert. Zum anderen wurden Lösungen vom Lévy-Typ hergeleitet und ausgewertet. Desweiteren wurden semi-analytische Methoden im Rahmen des Ritz-Verfahrens hergeleitet und implementiert. Die Arbeiten zur lokalen Stabilität wurden mit einem ganzheitlichen Verfahren, basierend auf dem Ritz-Verfahren in Verbindung mit Lagrangeschen Multiplikatoren, abgeschlossen. Insgesamt zeigt sich hier eine sehr hohe Rechengenauigkeit bei gleichzeitig niedrigem numerischen Aufwand. Die Auswahl eines Analyseverfahrens sollte in der praktischen Anwendung im Hinblick auf die erreichbare Rechengenauigkeit einerseits und auf den zu treibenden Rechenaufwand andererseits zweckmäßig erfolgen.
- Das Themenfeld der Gesamtstabilität konnte in diesem Vorhaben nicht mehr bearbeitet werden. Die Bearbeitung der Thematik der lokalen Stabilität erwies sich als deutlich aufwendiger als vorab vermutet. Jedoch liegen mit dem erreichten Stand bezüglich der globalen und lokalen Stabilität nunmehr alle Methoden vor, die für die Behandlung der Gesamtstabilität notwendig wären. Es wird empfohlen, das Themengebiet der Gesamtstabilität in einem Folgevorhaben anzugehen.
- Die geplanten Experimente waren aus gleichen Gründen im Rahmen des gegenwärtigen Vorhabens nicht mehr durchführbar. Im Sinne einer sicheren Validierung der erarbeiteten Methoden wird empfohlen, in einem Folgevorhaben die experimentelle Validierung klar in den Vordergrund zu stellen.



# Literatur

- [1] Sedlacek G, Trumpf H (2003), Mobile Leichtbau-Festbrücken aus pultrudierten faserverstärkten Polymerprofilen, *Bauingenieur* 78, 451-458.
- [2] Roth T (2005), Swissfiber bridge VC02: A modular pedestrian bridge system in FRP; A step forward in FRP bridge construction, *Proceedings of the COBRAE Conference 2005: Bridge Engineering with Polymer Composites*, Zürich, Schweiz.
- [3] Blaß HJ, Romani M (2000), Trag- und Verformungsverhalten von Verbundträgern aus Brettschichtholz und faserverstärkten Kunststoffen, *Forschungsbericht*, Universität Karlsruhe, Deutschland.
- [4] Blaß HJ, Romani M, Schmid M (2003), Optimierung von Verbundträgern aus Brettschichtholz mit Verstärkungen aus Faserverbundkunststoffen, *Forschungsbericht*, Universität Karlsruhe, Deutschland.
- [5] Pham H, Al-Mahaidi R (2004), Assessment of available prediction models for the strength of FRP retrofitted RC beams, *Composite Structures* 66, 601-610.
- [6] Hadi MNS, Li J (2004), External reinforcement of high strength concrete columns, *Composite Structures* 65, 279-287.
- [7] Deng J, Lee MMK, Moy SSJ (2004), Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate, *Composite Structures* 65, 205-215.
- [8] N N (2005), *Proceedings of the COBRAE Conference 2005: Bridge Engineering with Polymer Composites*, Zürich, Schweiz.
- [9] Timoshenko SP (1921), Über die Stabilität versteifter Platten, *Eisenbau* 12, 147-163.
- [10] Marguerre K (1937), Die mitwirkende Breite der gedrückten Platte, *Luftfahrtforschung* 14, 627-639.
- [11] Timoshenko SP, Gere JM (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill New York.
- [12] Chia CY (1980), *Nonlinear analysis of plates*, McGraw-Hill New York.
- [13] Turvey GJ, Marshall I (1995), *Buckling and postbuckling of composite plates*, Chapman and Hall London.
- [14] Singer J, Arbocz J, Weller T (1998), *Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures, volume 1: basic concepts, columns, beams and plates*, John Wiley and sons New York.
- [15] Singer J, Arbocz J, Weller T (2002), *Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures, volume 2: shells, built-up structures, composites and additional topics*, John Wiley and sons New York.
- [16] Jones RM (1975), *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill New York.
- [17] Altenbach H, Altenbach J, Rikards R (1996), *Einführung in die Mechanik der Laminat-*

und Sandwichtragwerke, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart.

- [18] Reddy JN (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells* (2nd edition), CRC Press Boca Raton et al.
- [19] Jung SN, Nagaraj VT, Chopra I (1999), Assessment of composite rotor blade modeling techniques, *Journal of the American Helicopter Society* 44, 188-205.
- [20] Jeon SM, Cho MH, Lee I (1995), Static and dynamic analysis of composite box beams using large deflection theory, *Composite Structures* 57, 635-642.
- [21] McCarthy TR, Chattopadhyay A (1997), A refined higher-order composite box beam theory, *Composites Part B: Engineering* 28B, 523-534.
- [22] Maddur SS, Chaturvedi SK (2000), Laminated composite open profile sections: non-uniform torsion of I-sections, *Composite Structures* 50, 159-169.
- [23] Song O, Librescu L, Jeong NH (2001), Static response of thin-walled composite I-beams loaded at their free-end cross-section: analytical solution, *Composite Structures* 52, 55-65.
- [24] Qin Z, Librescu L (2002), On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: further contribution and validations, *Composite Structures* 56, 345-358.
- [25] Wu Y, Zhu Y, Lai Y, Pan W (2002), Analysis of shear lag and shear deformation effects in laminated composite box beams under bending loads, *Composite Structures* 55, 147-156.
- [26] Jung SN, Lee JY (2003), Closed-form analysis of thin-walled composite I-beams considering non-classical effects, *Composite Structures* 60, 9-17.
- [27] Lee J (2005), Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory, *Composite Structures* 70, 212-222.
- [28] Bank LC, Yin J (1996), Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained edges, *Thin-Walled Structures* 24, 83-96.
- [29] Kollar L (2002), Buckling of unidirectionally loaded composite plates with one free and one rotationally restrained unloaded edge, *Journal of Structural Engineering* 128, 1202-1211.
- [30] Kollar L (2003), Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections, *Journal of Structural Engineering* 129, 1503-1513.
- [31] Qiao P, Davalos JF, Wang J (2001), Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis, *Journal of Structural Engineering* 127, 245-255.
- [32] Qiao P, Zou G (2002), Local buckling of elastically restrained fiber-reinforced plastic plates and its application to box sections, *Journal of Engineering Mechanics* 128, 1324-1330.
- [33] Qiao P, Shan L (2005), Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes, *Composite Structures* 70, 468-483.
- [34] Zureick A, Shih B (1998), Local buckling of fiber-reinforced polymeric structural members under linearly-varying edge loading - part 1. Theoretical formulation, *Composite Structures* 41, 79-86.
- [35] Narita Y, Leissa AW (1990), Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates, *International Journal of Mechanical Sciences* 11, 909-924.
- [36] Becker W, Hansel W, Oehm M (2000), Buckling analysis of non-orthotropic laminates

by means of B-spline functions, *Technische Mechanik* 21, 31-40.

[37] Wittenberg TC, Hol JMAM, van Baten TJ (2006), Shear buckling of flat orthotropic stiffened panels with application to glare material, *AIAA Journal* 44, 2179-2188.

[38] Kunz RK (1989), Postbuckling of stiffened composite plates under combined loading, *Proceedings of the 8th DoD / NASA / FFA Conference on fibrous composites in structural design*, NASA CP-3087, S. 591-608.

[39] Shin DK, Griffin, OH jr, Gürdal, Z (1993), Postbuckling response of laminated plates under uniaxial compression, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 28, 95-115.

[40] Byklum E (2002), Ultimate strength analysis of stiffened steel and aluminium panels using semi-analytical methods, *Dissertation*, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.

[41] Byklum E, Amdahl J (2002), A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling, *Thin-Walled Structures* 40, 925-953.

[42] Buermann P, Rolfes R, Tessmer J, Schagerl M (2006), A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer-and frame-stiffened cylindrical panels, *Thin-Walled Structures* 44, 102-114.

[43] Buermann P (2006), A semi-analytical model for the post-buckling analysis of stringer-and frame-stiffened cylindrical panels under combined loading, *Dissertation*, Technische Universität Braunschweig.

[44] Ovesy HR, Assaee H (2004), Finite strip buckling analysis of some composite stiffened box sections, *AIAA Journal* 42, 2382-2384.

[45] Ovesy HR, Loughlan J, Assaee H (2004), The compressive post-local buckling behaviour of thin plates using a semi-energy finite strip approach, *Thin-Walled Structures* 42, 449-474.

[46] Ovesy HR, Loughlan J, GhannadPour SAM, Morada G (2006), Geometric non-linear analysis of box-sections under end-shortening, using three different versions of the finite-strip method, *Thin-Walled Structures* 44, 623-637.

[47] Riks E (2000), Buckling and post-buckling analysis of stiffened panels in wing box structures, *International Journal of Solids and Structures* 37, 6795-6824.

[48] Zou G, Qiao P (2002), Higher-order finite strip method for postbuckling analysis of imperfect composite plates, *Journal of Engineering Mechanics* 128, 1008-1015.

[49] Loughlan J (1994), The buckling performance of composite stiffened panel structures subjected to combined in-plane compression and shear loading, *Composite Structures* 29, 197-212.

[50] Möcker T, Reimerdes HG (2006), Postbuckling simulation of curved stiffened composite panels by the use of strip elements, *Composite Structures* 73, 237-243.

[51] Adany S, Schafer BW (2006), Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation, *Thin-Walled Structures* 44, 563-584.

[52] Adany S, Schafer BW (2006), Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples, *Thin-Walled Structures* 44, 585-600.

[53] Silva NMF, Camotim D, Silvestre N, Degenhardt R (2009), On the use of generalised

beam theory to assess the buckling and post-buckling behaviour of laminated CFRP cylindrical stiffened panels, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, im Druck.

- [54] Romeo G, Frulla G (1997), Post-buckling behaviour of graphite/epoxy stiffened panels with initial imperfections subjected to eccentric biaxial compression loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 32, 1017-1033.
- [55] Stein M (1983), Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression, *AIAA Journal* 21, 1729-1735.
- [56] Stein M (1984), Postbuckling of long orthotropic plates in combined shear and compression, *AIAA Journal* 23, 788-794.
- [57] Stevens KA, Ricci R, Davies GAO (1995), Postbuckling of long orthotropic plates in combined shear and compression, *Composites* 26, 189-199.
- [58] Kassegne SK, Reddy JN (1998), Local behaviour of discretely stiffened composite plates and cylindrical shells, *Composite Structures* 42, 13-26.
- [59] Sridharan S, Zeggane M (2001), Stiffened plates and cylindrical shells under interactive buckling, *Finite Elements in Analysis and Design* 38, 155-178.
- [60] Guo MW, Harik IE, Ren WX (2001), Buckling behaviour of stiffened laminated plates, *International Journal of Solids and Structures* 39, 3039-3055.
- [61] Viljoen A, Visser AG, Groenwold AA (2005), Computationally efficient analysis and optimization of stiffened thin-walled panels in shear, *Journal of Aircraft* 42, 743-747.
- [62] Linde P, Schulz A, Rust W (2006), Influence of modelling and solution methods on the FE-simulation of the post-buckling behaviour of stiffened aircraft fuselage panels, *Composite Structures* 73, 229-236.
- [63] Zimmermann R, Klein H, Kling A (2006), Buckling and postbuckling of stringer stiffened fibre composite curved panels - tests and computations, *Composite Structures* 73, 150-161.
- [64] Oh SHO, Kim KS, Kim CG (2006), An efficient postbuckling analysis technique for composite stiffened curved panels, *Composite Structures* 74, 361-369.
- [65] Mallela UK, Upadhyay A (2006), Buckling of laminated composite stiffened panels subjected to in-plane shear: a parametric study, *Thin-Walled Structures* 44, 354-361.
- [66] Patel SN, Datta PK, Sheikh AH (2006), Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels, *Thin-Walled Structures* 44, 321-333.
- [67] Noor AK, Starnes JH jr, Peters JM (1995), Thermomechanical postbuckling of multilayered composite panels with cutouts, *Composite Structures* 30, 369-388.
- [68] Barbero E, Tomblin J (1993), Euler buckling of thin-walled composite columns, *Thin-Walled Structures* 17, 237-258.
- [69] Barbero E, Raftoyiannis IG (1993), Euler buckling of pultruded composite columns, *Composite Structures* 24, 139-147.
- [70] Barbero E, Tomblin J (1994), A phenomenological design equation for FRP columns with interaction between local and global buckling, *Thin-Walled Structures* 18, 117-131.
- [71] Barbero E, Raftoyiannis IG (1994), Lateral and distortional buckling of pultruded I-beams, *Composite Structures* 27, 261-268.
- [72] Davalos J, Qiao P (1997), Analytical and experimental study of lateral and distortio-

- nal buckling of FRP wide-flange beams, *Journal of Composite for Construction* 1, 150-159.
- [73] Davalos J, Qiao P, Salim HA (1997), Flexural-torsional buckling of pultruded fiber reinforced plastic composite I-beams: experimental and analytical evaluations, *Composite Structures* 38, 241-250.
- [74] Gan LH, Ye L, Mai YW (1999), Simulations of mechanical performance of pultruded I-beams with various flange-web conjunctions, *Composites: Part B* 30, 423-429.
- [75] Lee J, Kim SE (2001), Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites, *Computers and Structures* 79, 987-995.
- [76] Kollar LP (2001), Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation, *International Journal of Solids and Structures* 38, 7525-7541.
- [77] Qiao P, Zou G, Davalos JF (2003), Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams, *Composite Structures* 60, 205-217.
- [78] Shan L, Qiao P (2005), Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams, *Composite Structures* 68, 211-224.
- [79] De Lorenzis L, La Tegola A (2005), Effect of the actual distribution of applied stresses on global buckling of isotropic and transversely isotropic thin-walled members: theoretical analysis, *Composite Structures* 68, 339-348.
- [80] Sapountzakis EJ (2005), Torsional vibrations of composite bars by BEM, *Composite Structures* 70, 229-239.
- [81] Teter A, Kolakowski Z (2005), Buckling of thin-walled composite structures with intermediate stiffeners, *Composite Structures* 69, 421-428.
- [82] Kolakowski Z, Kubiak T (2005), Load-carrying capacity of thin-walled composite structures, *Composite Structures* 67, 417-426.
- [83] Vo TP, Lee J (2007), Flexural-torsional buckling of thin-walled composite box beams, *Thin-Walled Structures* 45, 790-798.
- [84] Vo TP, Lee J (2009), Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory, *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 631-641.
- [85] Naderian HR, Ronagh HR, Azharic M (2011), Torsional and flexural buckling of composite FRP columns with cruciform sections considering local instabilities, *Composite Structures* 93, 2575-2586.
- [86] Sapountzakis EJ, Dourakopoulos JA (2008), Flexural-torsional buckling analysis of composite beams by BEM including shear deformation effect, *Mechanics Research Communications* 35, 497-516.
- [87] Vanderplaats GN (1984), *Numerical optimization techniques for engineering design*, McGraw-Hill New York.
- [88] Eschenauer H, Koski J, Osyczka A (1990), *Multicriteria design optimization*, Springer-Verlag Berlin.
- [89] Eschenauer H, Schnell W (1993), *Elastizitätstheorie*, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim.
- [90] Kamat MP (1993), *Structural optimization: status and promise*, AIAA, Progress in astronautics and aeronautics, Vol. 150.
- [91] Baier H, Seeßelberg C, Specht B (1994), *Optimierung in der Strukturmechanik*,

Vieweg-Verlag Braunschweig.

- [92] Walker M (1998), Multiobjective optimisation of laminated I-beams for maximum crippling, buckling and postbuckling strength, *Composites Part B: Engineering* 29B, 263-270.
- [93] Savic V, Tuttle ME, Zabinsky ZB (2001), Optimization of composite I-sections using fiber angles as design variables, *Composite Structures* 53, 265-277.
- [94] Rajasekaran S (2005), Optimal laminate sequence of non-prismatic thin-walled composite spatial members of generic section, *Composite Structures* 70, 200-211.
- [95] Lee J, Hollaway L, Thorne A, Head P (1995), The structural characteristic of a polymer composite cellular box beam in bending, *Construction and Building Materials* 9, 333-340.
- [96] Palmer DW, Lawrence CB, Gentry TR (1998), Progressive tearing failure of pultruded composite box beams: experiment and simulation, *Composites Science and Technology* 58, 1353-1359.
- [97] Gilchrist MD, Kinloch AJ, Matthews FL, Osiyemi SO (1996), Mechanical performance of carbon-fibre- and glass-fibre-reinforced epoxy I-beams: I. mechanical behaviour, *Composites Science and Technology* 56, 37-53.
- [98] Gilchrist MD, Kinloch AJ, Matthews FL (1996), Mechanical performance of carbon-fibre- and glass-fibre-reinforced epoxy I-beams: II. fractographic failure observations, *Composites Science and Technology* 56, 1031-1045.
- [99] Gilchrist MD, Kinloch AJ, Matthews FL (1999), Mechanical performance of carbon-fibre- and glass-fibre-reinforced epoxy I-beams: III. fatigue performance, *Composites Science and Technology* 59, 179-200.
- [100] Mittelstedt C, Becker W (2016), *Strukturmechanik ebener Laminate*, Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt.
- [101] Lindner J, Scheer J, Schmidt H, et al. (1993), *Stahlbauten, Erläuterungen zu DIN18800 Teil 1 bis Teil 4*, Beuth-Kommentare, Beuth-Verlag, Berlin.
- [102] N.N. (2016), *DIN 18800-1:2008-11: Stahlbauten - Teil 1: Bemessung und Konstruktion*.
- [103] N.N. (2016), *DIN 18800-2:2008-11: Stahlbauten - Teil 2: Stabilitätsfälle - Knicken von Stäben und Stabwerken*.
- [104] Klein M, Kiehl P (2001), *Einführung in die DIN-Normen*, Teubner-Verlag, Leipzig.
- [105] Barbero EJ (2013), *Finite Element Analysis of Composite Materials Using ABAQUS*, Second Edition, Taylor and Francis, Abingdon, UK.
- [106] Stehncken C (2011), *Numerische Analyse multistabiler Mehrschichtverbunde*, Apprimus-Verlag, Aachen.
- [107] Vlasov VZ (1961), *Thin-walled elastic beams*, National Science Foundation, Washington DC, USA.
- [108] Megson THG (2007), *Aircraft Structures for Engineering Students*, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.
- [109] Barbero EJ, Lopez-Anido R, Davalos JF (1993), On the Mechanics of Thin-Walled Laminated Composite Beams, *Journal of Composite Materials* 27, 806-829.
- [110] Bank LC, Bednarczyk PJ (1988), A beam theory for thin-walled composite beams,

---

Composites Science and Technology 32, 265-277.

[111] Massa JC, Barbero EJ (1998), A Strength of Materials Formulation for Thin Walled Composite Beams with Torsion, *Journal of Composite Materials* 32, 1560-1594.

[112] Smith SJ, Bank LC (1992), Modifications to beam theory for bending and twisting of open-section composite beams — experimental verification, *Composite Structures* 22, 169-177.

[113] Bank LC, Melehan TP (1989), Shear coefficients for multicelled thin-walled composite beams, *Composite Structures* 11, 259-276.

[114] Bauld NR, Tzeng LS (1984), A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections, *International Journal of Solids and Structures* 20, 277-297.

[115] Kobelev VV, Larichev AD (1988), Model of thin-walled anisotropic rods, *Mechanics of Composite Materials* 24, 97-104.

[116] Mansfield EH, Sobey AJ (1979), The Fiber Composite Helicopter Blade – Part 1: Stiffness Properties – Part 2: Prospectors for Aeroelastic Tailoring, *Aeronautical Quarterly* 30, 413–449.

[117] Wu XX, Sun CT (1992), Simplified theory for composite thin-walled beams, *AIAA Journal* 30, 2945-2951.

[118] Gross D, Hauger W, Schröder J, Wall W (2009), *Technische Mechanik 2: Band 2: Elastostatik*, Springer Verlag, Berlin et al.

[119] Kollár L, Springer G (2003), *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[120] Pluszík A, Kollár L (2006), Torsion of closed section, orthotropic, thin-walled beams, *International Journal of Solids and Structures* 43, 5307-5336.

[121] Linke M, Nast E (2015), *Festigkeitslehre für den Leichtbau*, Springer Verlag Berlin et al.

[122] Alfutov NA (1999), *Stability of elastic structures*, Springer Verlag, Berlin et al.

[123] Chen WF, Lui EM (1987), *Structural stability*, Elsevier, New York et al., USA.

[124] Galambos TV (1998), *Guide to stability design criteria for metal structures*, John Wiley and Sons, New York et al., USA.

[125] Gerard G, Becker H (1957), *Handbook of structural stability, part I: Buckling of flat plates*, NACA National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 3781, Washington, USA.

[126] Gerard G, Becker H (1957), *Handbook of structural stability, part III: Buckling of curved plates and shells*, NACA National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 3783, Washington, USA.

[127] Petersen C (1982), *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*, 2. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden.

[128] Pflüger A (1975), *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer Verlag, Berlin et al.

[129] Thompson JMT, Hunt GW (1973), *A general theory of elastic stability*, John Wiley and Sons, London et al., UK.

[130] Timoshenko SP, Gere JM (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill New York, USA.

[131] Schnell W, Czerwenka G (1970), *Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus*

II, Bibliographisches Institut, Mannheim.

[132] Anderson JM, Trahair NS (1972), Stability of monosymmetric beams and cantilevers, *Journal of the Structural Division*.

[133] Clark JW, Hill HN (1960), Lateral buckling of beams, *Journal of the Structural Division* 86, 175-196.

[134] Allen HG, Bulson PS (1980), *Background to buckling*, McGraw-Hill Inc., Columbus, USA.

[135] Sapkás Á, Kollár LP (2002), Lateral-torsional buckling of composite beams, *International Journal of Solids and Structures* 39, 2939-2963.

[136] Kühn T, Pasternak H, Mittelstedt C (2014), Local buckling of shear-deformable laminated composite beams with arbitrary cross-sections using discrete plate analysis, *Composite Structures* 113, 236-248.

# Eigene Publikationen

## **Publikationen in internationalen Zeitschriften mit Peer-Review, Buchkapitel:**

Mittelstedt S, Mittelstedt C (2019), Mixed-mode buckling of thick-walled composite beams, International Journal of Mechanical Sciences, zur Publikation angenommen, im Druck.

Herrmann J, Kühn T, Müllenstedt T, Mittelstedt S, Mittelstedt C (2018), A higher order shear deformation approach to the local buckling behaviour of moderately thick composite laminated beams, International Journal of Structural Stability and Dynamics, <https://doi.org/10.1142/S0219455418501390>.

Herrmann J, Kühn T, Müllenstedt T, Mittelstedt S, Mittelstedt C (2018), Closed-form approximate solutions for the local buckling behavior of composite laminated beams based on third-order shear deformation theory, Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis, 175-205.

**Publikationen in Tagungsbänden internationaler Konferenzen:** Mittelstedt S, Mittelstedt C (2019), A higher-order shear deformation approach to the mixed-mode buckling problem in composite laminated beams, Proceedings of the 90th GAMM Annual Meeting, 18.-22. Februar 2019, Wien, Österreich.

Mittelstedt S, Mittelstedt C (2018), Mixed-mode buckling of thick-walled composite beams, Proceedings of the 21st International Conference on Composite Structures, 4.-7. September 2018, Bologna, Italien.

Herrmann J, Kühn T, Müllenstedt T, Mittelstedt S, Mittelstedt C (2017): Local buckling of laminated composite beams based on different plate theories, PAMM – Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 17:333-334.

Herrmann J, Kühn T, Müllenstedt T, Mittelstedt S, Mittelstedt C (2017), Local buckling of composite laminated beams accounting for transverse shear deformations, Proceedings of the SAMPE – Society for the Advancement of Material and Process Engineering – Conference, 14th – 16th November 2017, Stuttgart.

Herrmann J, Kühn T, Müllenstedt T, Mittelstedt S, Mittelstedt C (2017), Local buckling analysis of composite laminated beams using several laminated plate theories, Proceedings

---

of the ICCS20 – 20th International Conference on Composite Structures, 4-7 September 2017, Paris, Frankreich.

# Anhang 8.A: Integralresultanten nach FSDT

## Resultanten bezüglich der x-Richtung

Die Integralresultanten  $\Omega_{00}^1$ ,  $\Omega_{10}^1$ , ... der Ansatzfunktionen bezüglich der  $x$ -Richtung gemäß (8.11) sind für alle vier hier betrachteten Fälle von Randbedingungen identisch und lauten:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{00}^1 &= \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{x1p} dx = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{10}^1 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \psi_{x1p} dx = \frac{-m\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{-2m^2}{m^2 - p^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Omega_{11}^1 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1p}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} dx = \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{m^2 \pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{00}^2 &= \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{y1p} dx = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pa}{(p^2 - m^2)\pi} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Omega_{01}^2 &= \int_0^a \psi_{x1m} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{p\pi}{2} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{10}^2 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \psi_{y1p} dx = \frac{-m\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{-m\pi}{2} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{11}^2 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = -mp \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \\ \frac{-2m^2p\pi}{a(m^2-p^2)} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{00}^3 &= \int_0^a \psi_{y1m}\psi_{y1p}dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m=p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{10}^3 &= \int_0^a \frac{\partial\psi_{y1m}}{\partial x}\psi_{y1p}dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \\ \frac{2mp}{p^2-m^2} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{11}^3 &= \int_0^a \frac{\partial\psi_{y1m}}{\partial x}\frac{\partial\psi_{y1p}}{\partial x}dx = mp\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{mp\pi^2}{2a} & \text{wenn } m=p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{00}^4 &= \int_0^a w_{1m}w_{1p}dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m=p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{10}^4 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x}w_{1p}dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{p^2-m^2} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{11}^4 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x}\frac{\partial w_{1p}}{\partial x}dx = mp\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{mp\pi^2}{2a} & \text{wenn } m=p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{00}^5 &= \int_0^a w_{1m}\psi_{y1p}dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{wenn } m=p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{10}^5 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x}\psi_{y1p}dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{p^2-m^2} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{00}^6 &= \int_0^a w_{1m}\psi_{x1p}dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{2ma}{\pi(m^2-p^2)} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \end{cases}, \\
\Omega_{10}^6 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x}\psi_{x1p}dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ \frac{m\pi}{2} & \text{wenn } m=p \end{cases}.
\end{aligned}$$

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 1

Die Integralresultanten (8.11) für Fall 1 nach FSDT lauten:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
 \Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n + q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{n^2 - q^2} & \text{wenn } n + q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
 \Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n + q = \text{gerade} \\ \frac{2bn}{\pi(n^2 - q^2)} & \text{wenn } n + q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} \frac{-q\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
 \Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
 \Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-n\pi q\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n + q = \text{gerade} \\ \frac{-2nq^2\pi}{b(q^2 - n^2)} & \text{wenn } n + q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
 \Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-q\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2q^2}{(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n=q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n=q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{n^2-q^2} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n=q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nb}{(n^2-q^2)\pi} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{wenn } n=q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n=q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Für (8.15) folgt:

$$\begin{aligned}
Q_{00} &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}b^2 & \text{wenn } n=q \\ \frac{2b^2 nq}{\pi^2(n^2-q^2)^2} [(-1)^{n+q} - 1] & \text{wenn } n \neq q \end{cases}.
\end{aligned}$$

Aus (8.20) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \psi_{y2n}|_{y=0} \psi_{y2q}|_{y=0} = \cos(0) \cos(0) = 1, \\ \theta_{11} &= \psi_{y2n}|_{y=b} \psi_{y2q}|_{y=b} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ -1 & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}.\end{aligned}$$

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 2

Die Integralresultanten (8.11) für Fall 2 nach FSDT ergeben sich als:

$$\begin{aligned}\Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy \\ &= \int_0^b \left\{ \left[ \cos\left((n-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \cos\left((q-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((q+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right\} dy \\ &= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2+q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ \Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy \\ &= \int_0^b \left\{ \left[ \cos\left((n-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[ -\left((q-1)\frac{\pi}{b}\right) \sin\left((q-1)\pi\frac{y}{b}\right) + \left((q+1)\frac{\pi}{b}\right) \sin\left((q+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right\} dy \\ &= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q)(n+q)} \\ &\quad \text{wenn } n+q = \text{ungerade}, \\ \Delta_{10}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy \\ &= \int_0^b \left\{ \left[ \left(1-n\right)\left(\frac{\pi}{b}\right) \sin\left((n-1)\pi\frac{y}{b}\right) + \left(n+1\right)\left(\frac{\pi}{b}\right) \sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \cos\left((q-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((q+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right\} dy \\ &= \frac{32 \cdot n \cdot q \cdot (-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q) \cdot (n-q) \cdot (2+n-q) \cdot (-2+n+q) \cdot (n+q) \cdot (2+n+q)} \\ &\quad \text{wenn } n+q = \text{ungerade}, \\ \Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy \\ &= \int_0^b \left[ \left( \left(1-n\right)\frac{\pi}{b} \right) \sin\left((n-1)\pi\frac{y}{b}\right) + \left( \left(n+1\right)\frac{\pi}{b} \right) \sin\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ \left( \left(1-q\right)\frac{\pi}{b} \right) \sin\left((q-1)\pi\frac{y}{b}\right) + \left( \left(q+1\right)\frac{\pi}{b} \right) \sin\left((q+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32 \cdot n \cdot q \cdot (-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q) \cdot (n - q) \cdot (2 + n - q) \cdot (2 + n + q) \cdot (-2 + n + q) \cdot (n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q)(n - q)(2 + n - q)(-2 + n + q)(2 + n + q)(n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\
&= \int_0^b \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \\
&\times \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q) \cdot (n+q)} \\
&\text{wenn } n+q = \text{ungerade},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\Delta_{00}^5 = \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ (1-n) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + (n+1) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32 \cdot n \cdot q \cdot (-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q) \cdot (n - q) \cdot (2 + n - q) \cdot (-2 + n + q) \cdot (n + q) \cdot (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ (1-n) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + (n+1) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32 \cdot n \cdot q \cdot (-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q) \cdot (n - q) \cdot (2 + n - q) \cdot (-2 + n + q) \cdot (n + q) \cdot (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade},
\end{aligned}$$

Für (8.15) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q_{00} &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] y \Big\} dy \\ & = \begin{cases} b^2 \left( -\frac{2}{(n-q)^2} + \frac{1}{(2+n-q)^2} + \frac{1}{(2-n+q)^2} - \frac{1}{(-2+n+q)^2} + \frac{2}{(n+q)^2} - \frac{1}{(2+n+q)^2} \right) & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \\ \frac{\pi^2}{4b^2} & \text{wenn } n = q+2 \\ \frac{4}{b^2} & \text{wenn } n = q-2 \\ \frac{b^2}{2} & \text{wenn } n = q \neq 1 \\ \frac{3b^2}{4} & \text{wenn } q = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Naturgemäß führt Gl. (8.20) aufgrund der festen Randeinspannung bei  $y = 0$  und  $y = b$  auf verschwindende Beiträge der Randfedern:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \psi_{y2n} \Big|_{y=0} \psi_{y2q} \Big|_{y=0} = 0, \\ \theta_{11} &= \psi_{y2n} \Big|_{y=b} \psi_{y2q} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

### Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 3

Hier wird derjenige Fall berücksichtigt, dass keinerlei elastischen Randeinspannungen vorliegen ( $k_l = 0$ ) und dass das Laminat an drei Seiten gelenkig gelagert ist. Die Integralresultanten (8.11) für Fall 3 im Rahmen der FSDT lauten:

$$\begin{aligned} \Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^q dy = \frac{b}{n+q+1}, \\ \Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q}{b} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^{q-1} dy = \frac{q}{n+q}, \\ \Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{nq}{b^2} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^{(n+q-2)} dy = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\ \Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q}, \\ \Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q-1}{b} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^{q-2} dy = \frac{q-1}{n+q-1}, \\ \Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^{n-1} \left( \frac{y}{b} \right)^{q-1} dy = \frac{n}{n+q-1}, \\ \Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(q-1)n}{b^2} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^{n-1} \left( \frac{y}{b} \right)^{q-2} dy \\ &= \begin{cases} \frac{n(q-1)}{b(n+q-2)} & \text{wenn } n+q \neq 2 \\ 0 & \text{wenn } n=q=1 \end{cases}, \\ \Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^{n-1} \left( \frac{y}{b} \right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q-1}, \\ \Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q-1}{b} \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^{n-1} \left( \frac{y}{b} \right)^{q-2} dy \\ &= \begin{cases} \frac{(q-1)}{(n+q-2)} & \text{wenn } n+q \neq 2 \\ 0 & \text{wenn } n=q=1 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(n-1)(q-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{(n-1)(q-1)}{b(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{b}{n+q+1}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{q}{n+q}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{nq}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{n}{n+q-1}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{b}{n+q+1}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n}{n+q}.
\end{aligned}$$

Aus (8.15) folgt:

$$Q_{00}^{nq} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q y dy = \frac{b^2}{n+q+2}.$$

Gl. (8.20) ergibt:

$$\Phi_{11} = \psi_{y2n} \Big|_{y=0} \psi_{y2q} \Big|_{y=0} = 0.$$

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 4

Die Integralresultanten (8.11) für Fall 4 im Falle der FSDT ergeben:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+q} dy = \frac{(1+n)(1+q)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(q+1)(n+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(q+1)(n+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{2+n+q}, \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(1+q)(1+n)}{b(1+n+q)}, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{(1+n)(1+q)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(1+n)(1+q)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{1+n}{n+q+2}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{1+n}{n+q+2}.
\end{aligned}$$

Gl. (8.15) ergibt:

$$Q_{00} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} y dy = \frac{b^2}{n+q+4}.$$

Gl. (8.20) entfällt hier naturgemäß aufgrund der vorliegenden Festeinspannung bei  $y = 0$  sowie dem freien Rand bei  $y = b$ .



# Anhang 8.B: Integralresultanten nach TSDT

## Resultanten bezüglich der x-Richtung

Die Integralresultanten nach Gl. (8.42) bezüglich der  $x$ -Richtung ergeben sich im Rahmen der TSDT als:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{00}^1 &= \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{x1p} dx = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{10}^1 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \psi_{x1p} dx = \frac{-m\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{-2m^2}{m^2 - p^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Omega_{11}^1 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1p}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} dx = \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{m^2 \pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{00}^2 &= \int_0^a \psi_{x1m} \psi_{y1p} dx = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pa}{(p^2 - m^2)\pi} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
 \Omega_{10}^2 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \psi_{y1p} dx = \frac{-m\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{-m\pi}{2} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{01}^2 &= \int_0^a \psi_{x1m} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{m\pi}{2} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
 \Omega_{11}^2 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{x1m}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = -mp \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{-2m^2 p \pi}{a(m^2 - p^2)} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{00}^3 &= \int_0^a \psi_{y1m} \psi_{y1p} dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{01}^3 &= \int_0^a \psi_{y1m} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2mp}{m^2 - p^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{10}^3 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{y1m}}{\partial x} \psi_{y1p} dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2mp}{p^2 - m^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{11}^3 &= \int_0^a \frac{\partial \psi_{y1m}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{y1p}}{\partial x} dx = mp \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{mp\pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{00}^4 &= \int_0^a w_{1m} w_{1p} dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{01}^4 &= \int_0^a w_{1m} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{m^2 - p^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{10}^4 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} w_{1p} dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{p^2 - m^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{11}^4 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx = mp \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{mp\pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{12}^4 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial^2 w_{1p}}{\partial x^2} dx = -mp^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{2mp^3\pi^2}{a^2(m^2 - p^2)} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \end{cases}, \\
\Omega_{20}^4 &= \int_0^a \frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2} w_{1p} dx = -\frac{m^2\pi^2}{a^2} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{-m^2\pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{22}^4 &= \int_0^a \frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{1p}}{\partial x^2} dx = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{m^4 \pi^4}{2a^3} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{00}^5 &= \int_0^a w_{1m} w_{1p} dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{wenn } m = p \\ 0 & \text{wenn } m \neq p \end{cases}, \\
\Omega_{01}^5 &= \int_0^a w_{1m} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{m^2 - p^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{10}^5 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} w_{1p} dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \\ \frac{2pm}{p^2 - m^2} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{11}^5 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx = \frac{p\pi}{a} \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ \frac{m^2 \pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \end{cases}, \\
\Omega_{20}^5 &= \int_0^a \frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2} w_{1p} dx = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ -\frac{m^2 \pi^2}{2a} & \text{wenn } m = p \end{cases}, \\
\Omega_{21}^5 &= \int_0^a \frac{\partial^2 w_{1m}}{\partial x^2} \frac{\partial w_{1p}}{\partial x} dx = -\frac{p\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{2m^3 \pi^2 p}{a^2(p^2 - m^2)} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \end{cases}, \\
\Omega_{00}^6 &= \int_0^a w_{1m} \psi_{x1p} dx = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{2ma}{\pi(m^2 - p^2)} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \end{cases}, \\
\Omega_{10}^6 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \psi_{x1p} dx = \frac{m\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ \frac{m\pi}{2} & \text{wenn } m = p \end{cases}, \\
\Omega_{01}^6 &= \int_0^a \psi_{x1m} \frac{\partial \psi_{x1p}}{\partial x} dx = \frac{-p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ -\frac{m\pi}{2} & \text{wenn } m = p \end{cases}, \\
\Omega_{11}^6 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{x1p}}{\partial x} dx = \frac{-m\pi}{a} \frac{p\pi}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} \frac{2p^2 m \pi}{a(m^2 - p^2)} & \text{wenn } m + p = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } m + p = \text{gerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{20}^6 &= \int_0^a \frac{\partial w_{1m}}{\partial x} \psi_{x1p} dx = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m+p = \text{gerade} \\ \frac{2m^3\pi}{a(p^2-m^2)} & \text{wenn } m+p = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Omega_{21}^6 &= \int_0^a \psi_{x1m} \frac{\partial \psi_{x1p}}{\partial x} dx = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{p\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq p \\ \frac{m^3\pi^3}{2a^2} & \text{wenn } m = p \end{cases},
\end{aligned}$$

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 1

Aus Gl. (8.42) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{n^2-q^2} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2bn}{\pi(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{-q\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-n\pi}{b} \frac{q\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq^2\pi}{b(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{-q\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2q^2}{(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{10}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \cdot \psi_{y2q} dy = \frac{-n\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2n^2}{(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{n^2-q^2} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{10}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} w_{2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2nq}{q^2-n^2} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{nq\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{02}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial x^2} dy = -\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{-n^2\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{21}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ \frac{2n^3q\pi^2}{b^2(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{22}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq q \\ \frac{n^4 \pi^4}{2b^3} & \text{wenn } n = q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q \text{ gerade} \\ \frac{2nb}{(n^2-q^2)\pi} & \text{wenn } n+q \text{ ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^5 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{-q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{-q\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{11}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = -\frac{n\pi}{b} \frac{q\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q \text{ gerade} \\ \frac{2n\pi q^2}{b(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q \text{ ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{20}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{y2q} dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{2n^3 \pi}{b(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \\ 0 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \end{cases}, \\
\Delta_{21}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{b}\right) \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{n^3 \pi^3}{2b^2} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{x2q} dy = \frac{n\pi}{b} \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q \text{ gerade} \\ \frac{2nq}{(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q \text{ ungerade} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^6 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q \text{ gerade} \\ \frac{2nq}{(n^2-q^2)} & \text{wenn } n+q \text{ ungerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = nq \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} \frac{q^2\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \\ 0 & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
\Delta_{20}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{x2q} dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq q \\ -\frac{n^2\pi^2}{2b} & \text{wenn } n = q \end{cases}, \\
\Delta_{21}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{q\pi}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n+q \text{ gerade} \\ \frac{2n^3q\pi^2}{b^2(q^2-n^2)} & \text{wenn } n+q \text{ ungerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

Mit (8.45) folgt:

$$\begin{aligned}
Q_{00}^{nq} &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) y dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}b^2 & \text{wenn } n = q \\ \frac{2b^2nq}{\pi^2(n^2-q^2)^2} [(-1)^{n+q} - 1] & \text{wenn } n \neq q \end{cases},
\end{aligned}$$

Gl. (8.47) führt auf:

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}^{nq} &= \psi_{y2n}|_{y=0} \psi_{y2q}|_{y=0} = \cos(0) \cos(0) = 1, \\
\theta_{11}^{nq} &= \psi_{y2n}|_{y=b} \psi_{y2q}|_{y=b} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n+q = \text{gerade} \\ -1 & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \end{cases},
\end{aligned}$$

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 2

Mit Gl. (8.42) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos\left((n-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((n+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \cos\left((q-1)\pi\frac{y}{b}\right) - \cos\left((q+1)\pi\frac{y}{b}\right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2+q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q)(n+q)} \\
&\text{wenn } n+q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q+2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2+q \\ \frac{b}{2} & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(2+n+q)(-2+n+q)(n+q)} \\
&\text{wenn } n+q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ (1-n) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q)(n - q)(2 + n - q)(-2 + n + q)(n + q)(2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ wenn } q \neq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q)(n - q)(2 + n - q)(-2 + n + q)(2 + n + q)(n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{10}^3 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q)(n - q)(2 + n - q)(-2 + n + q)(2 + n + q) \cdot (n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ \frac{b}{2} & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q)(n+q)} \\
&\text{wenn } n+q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{10}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} w_{2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q)(n+q)} \\
&\text{wenn } n+q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{02}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{-\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{\pi^2(q-1)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( - \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) + \left( \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{64\pi^2 n q (q^2 + n^2 + n^2 q^2 - 3)}{b^2 (-2 + n - q) (n - q) (2 + n - q) (-2 + n + q) (n + q) (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{22}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^4(1+q)^4}{2b^3} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^4(1+6q^2+q^4)}{b^3} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^4(q-1)^4}{2b^3} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \end{cases}, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \neq 1, q \neq 2 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ (1-n) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(n+q)(2+n+q)} \\
&\quad \text{wenn } n+q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{01}^5 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2+n^2+q^2)}{(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(2+n+q)(n+q)} \\
&\quad \text{wenn } n+q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{11}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \left( (1-n) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \left( (1-q) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q^2)}{2b} & \text{wenn } n = q+2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{20}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{y2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q+2 \\ \frac{-\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{\pi^2(q-1)^2}{2b} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \geq 3 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \left( - \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) + \left( \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) \right] \right\} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{64\pi^2 nq (q^2 + n^2 + n^2q^2 - 3)}{b^2 (-2 + n - q) (n - q) (2 + n - q) (-2 + n + q) (n + q) (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ b & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ \frac{-b}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3b}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{01}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ (1-q) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{-32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q) (n - q) (2 + n - q) (-2 + n + q) (n + q) (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \psi_{x2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ (1-n) \left( \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q) (n - q) (2 + n - q) (-2 + n + q) (n + q) (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade,} \\
\Delta_{11}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ - \left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ - \left( (q-1) \frac{\pi}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (q+1) \frac{\pi}{y} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{-\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q)^2}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{-\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{20}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{x2q} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^b \left\{ \left[ -\left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} dy \\
&= \begin{cases} \frac{\pi^2(1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{-\pi^2(1+q^2)}{b} & \text{wenn } n = q \\ \frac{\pi^2(-1+q)^2}{2b} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\
\Delta_{21}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ -\left( (n-1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) + \left( (n+1) \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \left( -\left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) + \left( \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{64\pi^2 n q (q^2 + n^2 + n^2 q^2 - 3)}{b^2 (-2 + n - q) (n - q) (2 + n - q) (-2 + n + q) (n + q) (2 + n + q)} \\
&\text{wenn } n + q = \text{ungerade},
\end{aligned}$$

Aus (8.45) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q_{00} &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy \\
&= \int_0^b \left\{ \left[ \cos \left( (n-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (n+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \cos \left( (q-1) \pi \frac{y}{b} \right) - \cos \left( (q+1) \pi \frac{y}{b} \right) \right] \right\} y dy \\
&= \begin{cases} \hat{Q} & \text{wenn } n + q = \text{ungerade} \\ \frac{-b^2}{4} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{-b^2}{4} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{b^2}{2} & \text{wenn } n = q \text{ und } q \neq 1 \\ \frac{3b^2}{4} & \text{wenn } n = q = 1 \end{cases}, \\
&\text{mit} \\
\hat{Q} &= \frac{b^2 \left( -\frac{2}{(n-q)^2} + \frac{1}{(2+n-q)^2} + \frac{1}{(2-n+q)^2} - \frac{1}{(-2+n+q)^2} + \frac{2}{(n+q)^2} - \frac{1}{(2+n+q)^2} \right)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Gl. (8.47) führt aufgrund der Festeinspannung an den Rändern  $y = 0$  und  $y = b$  auf verschwindende Werte.

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 3

Gl. (8.42) führt auf:

$$\Delta_{00}^1 = \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left( \frac{y}{b} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^q dy = \frac{b}{n+q+1},$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{q}{n+q}, \\
\Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{nq}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+q-2} dy = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q-1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy = \frac{q-1}{n+q-1}, \\
\Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{n}{n+q-1}, \\
\Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(q-1)n}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{(q-1)n}{b(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q-1}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q-1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{q-1}{n+q-2} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{10}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n-1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy \\
&= \frac{n-1}{n+q-2} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(n-1)(q-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{(n-1)(q-1)}{b(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{b}{n+q+1}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{q}{n+q}, \\
\Delta_{10}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} w_{2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n}{n+q}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{nq}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{02}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy = \frac{q(q-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy = \frac{q(q-1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{21}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{nq(n-1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy \\
&= \frac{nq(n-1)}{b^2(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{22}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy = \frac{nq(q-1)(n-1)}{b^4} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{nq(n-1)(q-1)}{b^3(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{b}{n+q}, \\
\Delta_{01}^5 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q-1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy = \frac{q-1}{n+q-1}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{n}{n+q-1}, \\
\Delta_{11}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{n(q-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{n(q-1)}{b(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \geq 3, \\
\Delta_{20}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{y2q} dy = \frac{n(n-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy \\
&= \frac{n(n-1)}{b(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{21}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n(n-1)(q-1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-2} dy \\
&= \frac{n(n-1)(q-1)}{b(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{b}{n+q+1}, \\
\Delta_{01}^6 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{q}{n+q}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{x2q} dy = \frac{n}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n}{n+q}, \\
\Delta_{11}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{nq}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{20}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{x2q} dy = \frac{n(n-1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n(n-1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{21}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{nq(n-1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy \\
&= \frac{nq(n-1)}{b^2(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2.
\end{aligned}$$

Aus (8.45) erhalten wir:

$$Q_{00}^{nq} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q y dy = \frac{b^2}{n+q+2}.$$

Es wird hier der Fall betrachtet, dass am Rand  $y = 0$  keine elastische Einspannung, sondern eine ideal gelenkige Lagerung vorliegt, so dass Gl. (8.47) entfällt.

## Resultanten bezüglich der y-Richtung, Fall 4

Mit Gl. (8.42) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^1 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^1 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+q} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \psi_{y2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^2 &= \int_0^b \psi_{x2n} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{q+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{10}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \psi_{y2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^2 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{x2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}}{\partial y} dy = \frac{(q+1)(n+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(q+1)(n+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n}^{fc} \psi_{y2q}^{fc} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^3 &= \int_0^b \psi_{y2n}^{fc} \frac{\partial \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{q+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{10}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}^{fc}}{\partial y} \psi_{y2q}^{fc} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^3 &= \int_0^b \frac{\partial \psi_{y2n}^{fc}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{00}^4 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{10}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} w_{2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^4 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{02}^4 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy = \frac{q(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy = \frac{q(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{21}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{n(q+1)(n+1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n(n+1)(q+1)}{b^2(n+q)}, \\
\Delta_{22}^4 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{2q}}{\partial y^2} dy = \frac{nq(q+1)(n+1)}{b^4} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q-1} dy \\
&= \frac{nq(n+1)(q+1)}{b^3(n+q-1)} \text{ wenn } n+q \neq 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^5 &= \int_0^b w_{2n} w_{2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^5 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{10}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} w_{2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^5 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{20}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} w_{2q} dy = \frac{n(n+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n(n+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{21}^5 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial w_{2q}}{\partial y} dy = \frac{n(q+1)(n+1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n(n+1)(q+1)}{b^2(n+q)}, \\
\Delta_{00}^6 &= \int_0^b w_{2n} \psi_{x2q} dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{01}^6 &= \int_0^b w_{2n} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{q+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{1+q}{n+q+2}, \\
\Delta_{10}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \psi_{x2q} dy = \frac{n+1}{b} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^6 &= \int_0^b \frac{\partial w_{2n}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{20}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \psi_{x2q} dy = \frac{n(n+1)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} dy = \frac{n(n+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{21}^6 &= \int_0^b \frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{x2q}}{\partial y} dy = \frac{n(q+1)(n+1)}{b^3} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \left(\frac{y}{b}\right)^q dy = \frac{n(n+1)(q+1)}{b^2(n+q)}.
\end{aligned}$$

Gl. (8.45) ergibt:

$$Q_{00}^{nq} = \int_0^b w_{2n} w_{2q} y dy = \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{q+1} y dy = \frac{b^2}{n+q+4}.$$

Gl. (8.47) führt auf verschwindende Werte aufgrund der Festeinspannung am Rand  $y = 0$  sowie des freien Randes bei  $y = b$ .

## Anhang 9.A: Inneres Potential

Für eine allgemeingültige Formulierung des inneren Potential  $\Pi_i$  gemäß (9.8) werden die nachfolgenden Integrale der Ansatzfunktionen (9.1) und (9.2) bzw. (9.4) und (9.5) eingeführt. Diese gelten für eine beliebige Wahl der Ansatzfunktionen.

$$\begin{aligned}
 \Omega_{ij}^{ss,1} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,1} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,fc,1} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,2} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,2} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,fc,2} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,ss,2} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{x1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,3} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{y1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,3} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{y1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,fc,3} &= \int_0^a \frac{\partial^i \psi_{y1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,4} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j w_{1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,4} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j w_{1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,fc,4} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j w_{1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{ss,5} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
 \Omega_{ij}^{fc,5} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}^{ss,fc,5} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^{fc,ss,5} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{y1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^{ss,6} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{ss}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^{fc,6} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^{ss,fc,6} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{ss}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{fc}}{\partial x^j} dx, \\
\Omega_{ij}^{fc,ss,6} &= \int_0^a \frac{\partial^i w_{1m}^{fc}}{\partial x^i} \frac{\partial^j \psi_{x1p}^{ss}}{\partial x^j} dx,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij}^{ss,1} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,1} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,1} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,2} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,2} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,2} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,ss,2} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{x2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,3} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{y2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,3} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{y2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,3} &= \int_0^l \frac{\partial^i \psi_{y2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,4} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j w_{2q}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,4} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j w_{2q}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,4} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j w_{2q}^{fc}}{\partial y^j} dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij}^{ss,5} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y^{2q}}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,5} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y^{2q}}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,5} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y^{2q}}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,ss,5} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{y^{2q}}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,6} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x^{2q}}^{ss}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,6} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x^{2q}}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{ss,fc,6} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{ss}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x^{2q}}^{fc}}{\partial y^j} dy, \\
\Delta_{ij}^{fc,ss,6} &= \int_0^l \frac{\partial^i w_{2n}^{fc}}{\partial y^i} \frac{\partial^j \psi_{x^{2q}}^{ss}}{\partial y^j} dy.
\end{aligned}$$

Es ist an dieser Stelle zweckmäßig, die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}k^{ss}l^{ss}} &= \Lambda_{11}^1 \Omega_{11}^{ss,1} \Delta_{00}^{ss,1} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{10}^{ss,1} \Delta_{01}^{ss,1} + \Lambda_{66}^1 \Omega_{00}^{ss,1} \Delta_{11}^{ss,1} + \Lambda_{55}^2 \Omega_{00}^{ss,1} \Delta_{00}^{ss,1}, \\
\Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}k^{fc}l^{fc}} &= \Lambda_{11}^1 \Omega_{11}^{fc,1} \Delta_{00}^{fc,1} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{10}^{fc,1} \Delta_{01}^{fc,1} + \Lambda_{66}^1 \Omega_{00}^{fc,1} \Delta_{11}^{fc,1} + \Lambda_{55}^2 \Omega_{00}^{fc,1} \Delta_{00}^{fc,1}, \\
\Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}k^{fc}l^{fc}} &= 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{00}^{ss,fc,1} \Delta_{11}^{ss,fc,1} + 2\Lambda_{11}^1 \Omega_{11}^{ss,fc,1} \Delta_{00}^{ss,fc,1} \\
&\quad + 2\Lambda_{16}^1 \left( \Omega_{10}^{ss,fc,1} \Delta_{01}^{ss,fc,1} + \Omega_{01}^{ss,fc,1} \Delta_{10}^{ss,fc,1} \right) + 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,1} \Delta_{00}^{ss,fc,1}, \\
\Gamma_i^{i^{ss}j^{ss}i^{ss}j^{ss}} &= \Lambda_{22}^1 \Omega_{00}^{ss,3} \Delta_{11}^{ss,3} + \Lambda_{66}^1 \Omega_{11}^{ss,3} \Delta_{00}^{ss,3} + \Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,3} \Delta_{00}^{ss,3} \\
&\quad + \alpha_1 H_{26} \Omega_{01}^{ss,3} \Delta_{10}^{ss,3} + \Lambda_{26}^3 \Omega_{10}^{ss,3} \Delta_{01}^{ss,3}, \\
\Gamma_i^{i^{fc}j^{fc}i^{fc}j^{fc}} &= \Lambda_{22}^1 \Omega_{00}^{fc,3} \Delta_{11}^{fc,3} + \Lambda_{66}^1 \Omega_{11}^{fc,3} \Delta_{00}^{fc,3} + \alpha_1 H_{26} \Omega_{01}^{fc,3} \Delta_{10}^{fc,3} \\
&\quad + \Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{fc,3} \Delta_{00}^{fc,3} + \Lambda_{26}^3 \Omega_{10}^{fc,3} \Delta_{01}^{fc,3}, \\
\Gamma_i^{i^{ss}j^{ss}i^{fc}j^{fc}} &= 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,3} \Delta_{00}^{ss,fc,3} + 2\Lambda_{22}^1 \Omega_{00}^{ss,fc,3} \Delta_{11}^{ss,fc,3} \\
&\quad + 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{11}^{ss,fc,3} \Delta_{00}^{ss,fc,3} + 2\Lambda_{26}^1 \left( \Omega_{01}^{ss,fc,3} \Delta_{10}^{ss,fc,3} + \Omega_{10}^{ss,fc,3} \Delta_{01}^{ss,fc,3} \right), \\
\Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}i^{ss}j^{ss}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{ss,2} \Delta_{00}^{ss,2} + 2\Lambda_{26}^1 \Omega_{00}^{ss,2} \Delta_{11}^{ss,2} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{11}^{ss,2} \Delta_{00}^{ss,2} \\
&\quad + 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{01}^{ss,2} \Delta_{10}^{ss,2} + 2\Lambda_{12}^1 \Omega_{10}^{ss,2} \Delta_{01}^{ss,2}, \\
\Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}i^{fc}j^{fc}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{fc,2} \Delta_{00}^{fc,2} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{11}^{fc,2} \Delta_{00}^{fc,2} + 2\Lambda_{26}^1 \Omega_{00}^{fc,2} \Delta_{11}^{fc,2} \\
&\quad + 2\Lambda_{12}^1 \Omega_{10}^{fc,2} \Delta_{01}^{fc,2} + 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{01}^{fc,2} \Delta_{10}^{fc,2}, \\
\Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}i^{fc}j^{fc}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,2} \Delta_{00}^{ss,fc,2} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{11}^{ss,fc,2} \Delta_{00}^{ss,fc,2} + 2\Lambda_{26}^1 \Omega_{00}^{ss,fc,2} \Delta_{11}^{ss,fc,2} \\
&\quad + 2\Lambda_{12}^1 \Omega_{10}^{ss,fc,2} \Delta_{01}^{ss,fc,2} + 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{01}^{ss,fc,2} \Delta_{10}^{ss,fc,2}, \\
\Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}i^{ss}j^{ss}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{fc,ss,2} \Delta_{00}^{fc,ss,2} + 2\Lambda_{16}^1 \Omega_{11}^{fc,ss,2} \Delta_{00}^{fc,ss,2} + 2\Lambda_{26}^1 \Omega_{00}^{fc,ss,2} \Delta_{11}^{fc,ss,2} \\
&\quad + 2\Lambda_{12}^1 \Omega_{10}^{fc,ss,2} \Delta_{01}^{fc,ss,2} + 2\Lambda_{66}^1 \Omega_{01}^{fc,ss,2} \Delta_{10}^{fc,ss,2}, \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}m^{ss}n^{ss}} &= \Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,4} \Delta_{11}^{ss,4} + \Lambda_{55}^2 \Omega_{11}^{ss,4} \Delta_{00}^{ss,4} + 2\alpha_1 H_{66} \Omega_{11}^{ss,4} \Delta_{11}^{ss,4} + 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{ss,4} \Delta_{01}^{ss,4} \\
&\quad + \alpha_2 \left( H_{16} \Omega_{12}^{ss,4} \Delta_{10}^{ss,4} + H_{26} \Omega_{01}^{ss,4} \Delta_{21}^{ss,4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \alpha_1 \left( H_{11} \Omega_{22}^{ss,4} \Delta_{00}^{ss,4} + H_{22} \Omega_{00}^{ss,4} \Delta_{22}^{ss,4} + 2H_{12} \Omega_{20}^{ss,4} \Delta_{02}^{ss,4} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}m^{fc}n^{fc}} &= \Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{fc,4} \Delta_{11}^{fc,4} + \Lambda_{55}^2 \Omega_{11}^{fc,4} \Delta_{00}^{fc,4} + 2\alpha_1 H_{66} \Omega_{11}^{fc,4} \Delta_{11}^{fc,4} \\
&+ \alpha_2 \left( H_{16} \Omega_{12}^{fc,4} \Delta_{10}^{fc,4} + H_{26} \Omega_{01}^{fc,4} \Delta_{21}^{fc,4} \right) \\
&+ 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{fc,4} \Delta_{01}^{fc,4} \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_1 \left( H_{11} \Omega_{22}^{fc,4} \Delta_{00}^{fc,4} + 2H_{12} \Omega_{20}^{fc,4} \Delta_{02}^{fc,4} + H_{22} \Omega_{00}^{fc,4} \Delta_{22}^{fc,4} \right), \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}m^{fc}n^{fc}} &= 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{11}^{ss,fc,4} \Delta_{00}^{ss,fc,4} + 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,4} \Delta_{11}^{ss,fc,4} \\
&+ 4\alpha_1 H_{66} \Omega_{11}^{ss,fc,4} \Delta_{11}^{ss,fc,4} + 2\Lambda_{45}^2 \left( \Omega_{10}^{ss,fc,4} \Delta_{01}^{ss,fc,4} + \Omega_{01}^{ss,fc,4} \Delta_{10}^{ss,fc,4} \right) \\
&+ \alpha_2 H_{16} \left( \Omega_{12}^{ss,fc,4} \Delta_{10}^{ss,fc,4} + \Omega_{21}^{ss,fc,4} \Delta_{01}^{ss,fc,4} \right) \\
&+ \alpha_2 H_{26} \left( \Omega_{10}^{ss,fc,4} \Delta_{12}^{ss,fc,4} + \Omega_{01}^{ss,fc,4} \Delta_{21}^{ss,fc,4} \right) \\
&+ \alpha_1 H_{11} \Omega_{22}^{ss,fc,4} \Delta_{00}^{ss,fc,4} \\
&+ \alpha_1 H_{12} \left( \Omega_{20}^{ss,fc,4} \Delta_{02}^{ss,fc,4} + \Omega_{02}^{ss,fc,4} \Delta_{20}^{ss,fc,4} \right) \\
&+ \alpha_1 H_{22} \Omega_{00}^{ss,fc,4} \Delta_{22}^{ss,fc,4}, \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}i^{ss}j^{ss}} &= 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,5} \Delta_{10}^{ss,5} + 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{ss,5} \Delta_{00}^{ss,5} + \Lambda_{66}^4 \Omega_{11}^{ss,5} \Delta_{10}^{ss,5} + \Lambda_{26}^4 \Omega_{10}^{ss,5} \Delta_{11}^{ss,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{22}^4 \Omega_{00}^{ss,5} \Delta_{21}^{ss,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{21}^{ss,5} \Delta_{00}^{ss,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{20}^{ss,5} \Delta_{01}^{ss,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{01}^{ss,5} \Delta_{20}^{ss,5}, \\
\Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}i^{fc}j^{fc}} &= 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{fc,5} \Delta_{10}^{fc,5} + 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{fc,5} \Delta_{00}^{fc,5} \\
&+ \Lambda_{66}^4 \Omega_{11}^{fc,5} \Delta_{10}^{fc,5} + \Lambda_{26}^4 \Omega_{10}^{fc,5} \Delta_{11}^{fc,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{22}^4 \Omega_{00}^{fc,5} \Delta_{21}^{fc,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{21}^{fc,5} \Delta_{00}^{fc,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{20}^{fc,5} \Delta_{01}^{fc,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{01}^{fc,5} \Delta_{20}^{fc,5}, \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}i^{fc}j^{fc}} &= 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,5} \Delta_{10}^{ss,fc,5} + 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{ss,fc,5} \Delta_{00}^{ss,fc,5} \\
&+ \Lambda_{66}^4 \Omega_{11}^{ss,fc,5} \Delta_{10}^{ss,fc,5} + \Lambda_{26}^4 \Omega_{10}^{ss,fc,5} \Delta_{11}^{ss,fc,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{22}^4 \Omega_{00}^{ss,fc,5} \Delta_{21}^{ss,fc,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{21}^{ss,fc,5} \Delta_{00}^{ss,fc,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{20}^{ss,fc,5} \Delta_{01}^{ss,fc,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{01}^{ss,fc,5} \Delta_{20}^{ss,fc,5}, \\
\Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}i^{ss}j^{ss}} &= 2\Lambda_{44}^2 \Omega_{00}^{fc,ss,5} \Delta_{10}^{fc,ss,5} + 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{10}^{fc,ss,5} \Delta_{00}^{fc,ss,5} \\
&+ \Lambda_{66}^4 \Omega_{11}^{fc,ss,5} \Delta_{10}^{fc,ss,5} + \Lambda_{26}^4 \Omega_{10}^{fc,ss,5} \Delta_{11}^{fc,ss,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{22}^4 \Omega_{00}^{fc,ss,5} \Delta_{21}^{fc,ss,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{21}^{fc,ss,5} \Delta_{00}^{fc,ss,5} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{20}^{fc,ss,5} \Delta_{01}^{fc,ss,5} + \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{01}^{fc,ss,5} \Delta_{20}^{fc,ss,5}, \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}k^{ss}l^{ss}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{ss,6} \Delta_{10}^{ss,6} + 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{10}^{ss,6} \Delta_{00}^{ss,6} \\
&+ \Lambda_{16}^4 \Omega_{11}^{ss,6} \Delta_{10}^{ss,6} + \Lambda_{66}^4 \Omega_{10}^{ss,6} \Delta_{11}^{ss,6} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{00}^{ss,6} \Delta_{21}^{ss,6} + \frac{1}{2} \Lambda_{11}^4 \Omega_{21}^{ss,6} \Delta_{00}^{ss,6} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{01}^{ss,6} \Delta_{20}^{ss,6} + \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{20}^{ss,6} \Delta_{01}^{ss,6}, \\
\Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}k^{fc}l^{fc}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{fc,6} \Delta_{10}^{fc,6} + 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{10}^{fc,6} \Delta_{00}^{fc,6} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{00}^{fc,6} \Delta_{21}^{fc,6} + \frac{1}{2} \Lambda_{11}^4 \Omega_{21}^{fc,6} \Delta_{00}^{fc,6} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{12}^4 \Omega_{01}^{fc,6} \Delta_{20}^{fc,6} + \frac{1}{2} \Lambda_{16}^4 \Omega_{20}^{fc,6} \Delta_{01}^{fc,6} \\
&+ \Lambda_{16}^4 \Omega_{11}^{fc,6} \Delta_{10}^{fc,6} + \Lambda_{66}^4 \Omega_{10}^{fc,6} \Delta_{11}^{fc,6}, \\
\Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}k^{fc}l^{fc}} &= 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{ss,fc,6} \Delta_{10}^{ss,fc,6} + 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{10}^{ss,fc,6} \Delta_{00}^{ss,fc,6} \\
&+ \Lambda_{66}^4 \Omega_{10}^{ss,fc,6} \Delta_{11}^{ss,fc,6} + \Lambda_{16}^4 \Omega_{11}^{ss,fc,6} \Delta_{10}^{ss,fc,6} \\
&+ \frac{1}{2} \Lambda_{26}^4 \Omega_{00}^{ss,fc,6} \Delta_{21}^{ss,fc,6} + \frac{1}{2} \Lambda_{11}^4 \Omega_{21}^{ss,fc,6} \Delta_{00}^{ss,fc,6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\Lambda_{12}^4 \Omega_{01}^{ss,fc,6} \Delta_{20}^{ss,fc,6} + \frac{1}{2}\Lambda_{16}^4 \Omega_{20}^{ss,fc,6} \Delta_{01}^{ss,fc,6}, \\
\Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}k^{ss}l^{ss}} & = 2\Lambda_{45}^2 \Omega_{00}^{fc,ss,6} \Delta_{10}^{fc,ss,6} + 2\Lambda_{55}^2 \Omega_{10}^{fc,ss,6} \Delta_{00}^{fc,ss,6} \\
& + \frac{1}{2}\Lambda_{26}^4 \Omega_{00}^{fc,ss,6} \Delta_{21}^{fc,ss,6} + \frac{1}{2}\Lambda_{11}^4 \Omega_{21}^{fc,ss,6} \Delta_{00}^{fc,ss,6} \\
& + \Lambda_{66}^4 \Omega_{10}^{fc,ss,6} \Delta_{11}^{fc,ss,6} + \Lambda_{16}^4 \Omega_{11}^{fc,ss,6} \Delta_{10}^{fc,ss,6} \\
& + \frac{1}{2}\Lambda_{12}^4 \Omega_{01}^{fc,ss,6} \Delta_{20}^{fc,ss,6} + \frac{1}{2}\Lambda_{16}^4 \Omega_{20}^{fc,ss,6} \Delta_{01}^{fc,ss,6},
\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}^1 & = \frac{1}{2}D_{ij} - \frac{4}{3t^2}F_{ij} + \frac{8}{9t^4}H_{ij}, \\
\Lambda_{ij}^2 & = \frac{1}{2}A_{ij} - \frac{4}{t^2}D_{ij} + \frac{8}{t^4}F_{ij}, \\
\Lambda_{ij}^3 & = D_{ij} - \frac{8}{3t^2}F_{ij}, \\
\Lambda_{ij}^4 & = -\frac{8}{3t^2}F_{ij} + \frac{32}{9t^4}H_{ij}, \\
\alpha_1 & = \frac{16}{9t^4}, \\
\alpha_2 & = \frac{32}{9t^2}.
\end{aligned}$$

Mit diesen so eingeführten Abkürzungen kann das innere Potential  $\Pi_i$  angeschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\Pi_i & = \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} \sum_{p=1}^{p=K^{ss}} \sum_{q=1}^{q=L^{ss}} X_{mn}^{ss} X_{pq}^{ss} \Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}k^{ss}l^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} \sum_{p=1}^{p=K^{fc}} \sum_{q=1}^{q=L^{fc}} X_{mn}^{ss} X_{pq}^{fc} \Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}k^{fc}l^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K^{fc}} \sum_{n=1}^{n=L^{fc}} \sum_{p=1}^{p=K^{fc}} \sum_{q=1}^{q=L^{fc}} X_{mn}^{fc} X_{pq}^{fc} \Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}k^{fc}l^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{ss}} \sum_{q=1}^{q=J^{ss}} Y_{mn}^{ss} Y_{pq}^{ss} \Gamma_i^{i^{ss}j^{ss}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=I^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} Y_{mn}^{ss} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{i^{ss}j^{ss}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=I^{fc}} \sum_{n=1}^{n=J^{fc}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} Y_{mn}^{fc} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{i^{ss}j^{ss}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{ss}} \sum_{q=1}^{q=J^{ss}} X_{mn}^{ss} Y_{pq}^{ss} \Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K^{ss}} \sum_{n=1}^{n=L^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} X_{mn}^{ss} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{k^{ss}l^{ss}i^{fc}j^{fc}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{m=K^{fc}} \sum_{n=1}^{n=L^{fc}} \sum_{p=1}^{p=I^{ss}} \sum_{q=1}^{q=J^{ss}} X_{mn}^{fc} Y_{pq}^{ss} \Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=K^{fc}} \sum_{n=1}^{n=L^{fc}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} X_{mn}^{fc} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{k^{fc}l^{fc}i^{fc}j^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{ss}} \sum_{q=1}^{q=N^{ss}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{ss} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}m^{ss}n^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}m^{fc}n^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{fc} W_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}m^{fc}n^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{ss}} \sum_{q=1}^{q=J^{ss}} W_{mn}^{ss} Y_{pq}^{ss} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} W_{mn}^{ss} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}i^{fc}j^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=I^{ss}} \sum_{q=1}^{q=J^{ss}} W_{mn}^{fc} Y_{pq}^{ss} \Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}i^{ss}j^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=I^{fc}} \sum_{q=1}^{q=J^{fc}} W_{mn}^{fc} Y_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}i^{fc}j^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=K^{ss}} \sum_{q=1}^{q=L^{ss}} W_{mn}^{ss} X_{pq}^{ss} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}k^{ss}l^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=K^{fc}} \sum_{q=1}^{q=L^{fc}} W_{mn}^{ss} X_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{ss}n^{ss}k^{fc}l^{fc}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=K^{ss}} \sum_{q=1}^{q=L^{ss}} W_{mn}^{fc} X_{pq}^{ss} \Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}k^{ss}l^{ss}} \\
& + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=K^{fc}} \sum_{q=1}^{q=L^{fc}} W_{mn}^{fc} X_{pq}^{fc} \Gamma_i^{m^{fc}n^{fc}k^{fc}l^{fc}} .
\end{aligned}$$

## Anhang 9.B: Äußeres Potential

Mit den Ansatzfunktionen (9.1) und (9.2) bzw. (9.4) und (9.5) kann das äußere Potential  $\Pi_a$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \Pi_a = & -\frac{\lambda N_{xx}^0}{2} \left[ \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{ss}} \sum_{q=1}^{q=N^{ss}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{ss} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}^{ss}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}^{ss}}{\partial x} dx \int_0^l w_{2n}^{ss} w_{2q}^{ss} y dy \right. \\ & + \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{fc} W_{pq}^{fc} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}^{fc}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}^{fc}}{\partial x} dx \int_0^l w_{2n}^{fc} w_{2q}^{fc} y dy \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{fc} \int_0^a \frac{\partial w_{1m}^{ss}}{\partial x} \frac{\partial w_{1p}^{fc}}{\partial x} dx \int_0^l w_{2n}^{ss} w_{2q}^{fc} y dy \right]. \end{aligned}$$

Mit den Resultanten der Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} Q_{00}^{ss} &= \int_0^l w_{2n}^{ss} w_{2q}^{ss} y dy, \\ Q_{00}^{ss,fc} &= \int_0^l w_{2n}^{ss} w_{2q}^{fc} y dy, \\ Q_{00}^{fc} &= \int_0^l w_{2n}^{fc} w_{2q}^{fc} y dy \end{aligned}$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} T_a^{m^{ss}n^{ss}m^{ss}n^{ss}} &= \frac{N_{xx}^0}{2} \Omega_{11}^{ss,4} \Delta_{00}^{ss,4}, \\ T_a^{m^{fc}n^{fc}m^{fc}n^{fc}} &= \frac{N_{xx}^0}{2} \Omega_{11}^{fc,4} \Delta_{00}^{fc,4}, \\ T_a^{m^{ss}n^{ss}m^{fc}n^{fc}} &= N_{xx}^0 \Omega_{11}^{ss,fc,4} \Delta_{00}^{ss,fc,4} \end{aligned}$$

lässt sich das äußere Potential  $\Pi_a$  schreiben als:

$$\begin{aligned} \Pi_a = & -\lambda \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{ss}} \sum_{q=1}^{q=N^{ss}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{ss} \Gamma_a^{m^{ss}n^{ss}m^{ss}n^{ss}} \\ & - \lambda \sum_{m=1}^{m=M^{fc}} \sum_{n=1}^{n=N^{fc}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{fc} W_{pq}^{fc} \Gamma_a^{m^{fc}n^{fc}m^{fc}n^{fc}} \end{aligned}$$

---

$$- \lambda \sum_{m=1}^{m=M^{ss}} \sum_{n=1}^{n=N^{ss}} \sum_{p=1}^{p=M^{fc}} \sum_{q=1}^{q=N^{fc}} W_{mn}^{ss} W_{pq}^{fc} \Gamma_a^{m^{ss} n^{ss} p^{fc} q^{fc}}.$$

# Anhang 9.C: Resultanten der Ansatzfunktionen für Flansche und Steg

Mit den Ansatzfunktionen (9.1) und (9.2) bzw. (9.4) und (9.5) können die Integralresultanten des Anhangs 9.A bezüglich der longitudinalen Richtung  $x$  sowohl für die Flansche als auch den Steg geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\Omega_{00}^{ss,1} &= \Omega_{00}^{fc,1} = \Omega_{00}^{ss,fc,1} = \Omega_{00}^{ss,3} = \Omega_{00}^{fc,3} = \Omega_{00}^{ss,fc,3} = \Omega_{00}^{ss,4} = \Omega_{00}^{fc,4} = \Omega_{00}^{ss,fc,4} \\
&= \Omega_{00}^{ss,5} = \Omega_{00}^{fc,5} = \Omega_{00}^{ss,fc,5} = \Omega_{00}^{fc,ss,5} = \frac{1}{2}a \quad \text{wenn } m = p, \\
\Omega_{11}^{ss,1} &= \Omega_{11}^{fc,1} = \Omega_{11}^{ss,fc,1} = \Omega_{11}^{ss,fc,3} = \Omega_{11}^{ss,4} = -\Omega_{20}^{ss,4} = \Omega_{11}^{fc,4} \\
&= -\Omega_{20}^{fc,4} = -\Omega_{20}^{ss,fc,4} = -\Omega_{20}^{ss,5} = \Omega_{11}^{fc,5} = -\Omega_{20}^{fc,5} = \Omega_{11}^{ss,fc,5} = -\Omega_{20}^{ss,fc,5} \\
&= \Omega_{11}^{fc,ss,5} = -\Omega_{20}^{fc,ss,5} = \Omega_{11}^{fc,3} = \Omega_{11}^{ss,3} = \Omega_{11}^{ss,fc,4} = \Omega_{11}^{ss,5} = -\Omega_{02}^{ss,fc,4} \\
&= \frac{mp\pi^2}{2a} \quad \text{wenn } m = p, \\
\Omega_{10}^{ss,1} &= \Omega_{10}^{fc,1} = \Omega_{10}^{ss,fc,1} = \frac{-2m^2}{m^2 - p^2} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{01}^{ss,fc,1} &= \frac{2p^2}{m^2 - p^2} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{00}^{ss,6} &= \Omega_{00}^{fc,6} = \Omega_{00}^{ss,fc,6} = \Omega_{00}^{fc,ss,6} = \frac{2ma}{(m^2 - p^2)\pi} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{00}^{ss,2} &= \Omega_{00}^{fc,2} = \Omega_{00}^{ss,fc,2} = \Omega_{00}^{fc,ss,2} = \frac{2pa}{(p^2 - m^2)\pi} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{11}^{ss,2} &= \Omega_{11}^{fc,2} = \Omega_{11}^{ss,fc,2} = \Omega_{11}^{fc,ss,2} = \frac{-2m^2p\pi}{a(m^2 - p^2)} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{11}^{ss,6} &= \Omega_{11}^{fc,6} = \Omega_{11}^{ss,fc,6} = \Omega_{11}^{fc,ss,6} = \frac{2p^2m\pi}{a(m^2 - p^2)} \quad \text{wenn } m + p = \text{ungerade}, \\
\Omega_{10}^{ss,2} &= -\Omega_{01}^{ss,2} = \Omega_{10}^{fc,2} = \Omega_{10}^{ss,fc,2} = \Omega_{10}^{fc,ss,2} = -\Omega_{10}^{ss,6} = -\Omega_{10}^{fc,6} \\
&= -\Omega_{10}^{ss,fc,6} = -\Omega_{10}^{fc,ss,6} = \frac{-m\pi}{2} \quad \text{wenn } m = p, \\
\Omega_{01}^{ss,fc,2} &= \Omega_{01}^{fc,ss,2} = -\Omega_{01}^{ss,6} = -\Omega_{01}^{fc,6} = -\Omega_{01}^{ss,fc,6} \\
&= -\Omega_{01}^{fc,ss,6} = \frac{p\pi}{2} \quad \text{wenn } m = p, \\
\Omega_{01}^{ss,3} &= -\Omega_{10}^{ss,3} = \Omega_{01}^{fc,3} = -\Omega_{10}^{fc,3} = \Omega_{01}^{ss,fc,3} = -\Omega_{10}^{ss,fc,3} = \Omega_{01}^{ss,4} \\
&= -\Omega_{10}^{ss,4} = \Omega_{01}^{fc,4} = -\Omega_{10}^{fc,4} = \Omega_{01}^{ss,fc,4} = -\Omega_{10}^{ss,fc,4} = \Omega_{01}^{ss,5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\Omega_{10}^{ss,5} = \Omega_{01}^{fc,5} = -\Omega_{10}^{fc,5} = \Omega_{01}^{ss,fc,5} = -\Omega_{10}^{ss,fc,5} = \Omega_{01}^{fc,ss,5} \\
&= -\Omega_{10}^{fc,ss,5} = \frac{2mp}{m^2 - p^2} \text{ wenn } m + p = \text{ungerade,} \\
\Omega_{12}^{ss,4} &= \Omega_{12}^{fc,4} = \Omega_{12}^{ss,fc,4} = \frac{2mp^3\pi^2}{a^2(m^2 - p^2)} \text{ wenn } m + p = \text{ungerade,} \\
\Omega_{21}^{ss,fc,4} &= \Omega_{21}^{ss,5} = \Omega_{21}^{fc,5} = \Omega_{21}^{ss,fc,5} = \Omega_{21}^{fc,ss,5} = -\frac{2m^3p\pi^2}{a^2(m^2 - p^2)} \text{ wenn } m + p = \text{ungerade,} \\
\Omega_{20}^{ss,6} &= \Omega_{20}^{fc,6} = \Omega_{20}^{ss,fc,6} = \Omega_{20}^{fc,ss,6} = -\frac{2m^3\pi}{a(m^2 - p^2)} \text{ wenn } m + p = \text{ungerade,} \\
\Omega_{21}^{ss,6} &= \Omega_{21}^{fc,6} = \Omega_{21}^{ss,fc,6} = \Omega_{21}^{fc,ss,6} = \frac{m^3\pi^3}{2a^2} \text{ wenn } m = p,
\end{aligned}$$

# Anhang 9.D: Resultanten der Ansatzfunktionen für den Steg

Mit den Ansatzfunktionen (9.1) und (9.2) für den Steg können die Integralresultanten der Anhang 9.A und 9.B bezüglich der Querrichtung  $y$  angegeben werden als:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^{ss,1} &= \Delta_{00}^{ss,3} = \Delta_{00}^{ss,4} = \Delta_{00}^{ss,6} = \frac{h}{2} \text{ wenn } n = q, \\
\Delta_{01}^{ss,1} &= \Delta_{01}^{ss,4} = -\Delta_{10}^{ss,4} = \Delta_{01}^{ss,6} = -\Delta_{10}^{ss,6} = \frac{2nq}{n^2 - q^2} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{11}^{ss,1} &= \Delta_{11}^{ss,3} = \Delta_{11}^{ss,6} = \Delta_{11}^{ss,4} = -\Delta_{02}^{ss,4} = -\Delta_{20}^{ss,6} = \frac{nq\pi^2}{2h} \text{ wenn } n = q, \\
\Delta_{11}^{fc,1} &= \Delta_{11}^{fc,4} = \Delta_{11}^{fc,2} = \Delta_{11}^{fc,3} = -\Delta_{02}^{fc,4} = \Delta_{11}^{fc,5} = -\Delta_{20}^{fc,5} = \Delta_{11}^{fc,6} = -\Delta_{20}^{fc,6} \\
&= \begin{cases} -\frac{\pi^2(1+q)^2}{2h} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^2(1+q^2)}{h} & \text{wenn } n = q \\ -\frac{\pi^2(-1+q)^2}{2h} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \end{cases}, \\
\Delta_{00}^{ss,fc,1} &= \Delta_{00}^{ss,fc,2} = \Delta_{00}^{ss,fc,4} = \Delta_{00}^{ss,fc,5} = \Delta_{00}^{ss,fc,6} = \Delta_{00}^{fc,ss,6} \\
&= -\frac{8hnq}{\pi(-1+n-q)(1+n-q)(-1+n+q)(1+n+q)} \text{ wenn } n + q = \text{gerade}, \\
\Delta_{11}^{ss,fc,1} &= \Delta_{11}^{ss,fc,2} = \Delta_{11}^{ss,fc,4} = -\Delta_{02}^{ss,fc,4} = -\Delta_{20}^{ss,fc,4} \\
&= \Delta_{11}^{ss,fc,5} = -\Delta_{20}^{ss,fc,5} = \Delta_{11}^{ss,fc,6} = -\Delta_{20}^{ss,fc,6} \\
&= -\frac{8n^3q\pi}{h(-1+n-q)(1+n-q)(-1+n+q)(1+n+q)} \text{ wenn } n + q = \text{gerade}, \\
\Delta_{01}^{fc,ss,2} &= -\Delta_{10}^{fc,ss,2} = \Delta_{01}^{fc,ss,5} = -\Delta_{10}^{fc,ss,5} \\
&= \frac{8nq^2}{(1+n+q)(q-1+n)(q-n+1)(q-n-1)} \text{ wenn } n + q = \text{gerade}, \\
\Delta_{01}^{ss,fc,3} &= -\Delta_{10}^{ss,fc,3} \\
&= -\frac{8n^2q}{(1+n+q)(q-1+n)(q-n+1)(q-n-1)} \text{ wenn } n + q = \text{gerade}, \\
\Delta_{21}^{fc,ss,5} &= -\frac{8n\pi^2q^4}{h^2(q+n+1)(q+n-1)(q-n+1)(q-n-1)} \text{ wenn } n + q = \text{gerade}, \\
\Delta_{11}^{fc,ss,6} &= -\Delta_{20}^{fc,ss,6} = -\frac{8nq^3\pi}{h(-1+n-q)(1+n-q)(-1+n+q)(1+n+q)} \text{ wenn } q + n = \text{gerade}, \\
\Delta_{01}^{ss,fc,1} &= -\Delta_{10}^{ss,fc,1} = \Delta_{01}^{ss,fc,2} = -\Delta_{10}^{ss,fc,2} = \Delta_{01}^{ss,fc,4} \\
&= -\Delta_{10}^{ss,fc,4} = \Delta_{01}^{ss,fc,5} = -\Delta_{10}^{ss,fc,5} = \Delta_{01}^{ss,fc,6} = -\Delta_{10}^{ss,fc,6} \\
&= \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{wenn } q = -1 + n \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{n\pi}{2} & \text{wenn } q = 1 + n \end{cases}, \\
\Delta_{00}^{ss,2} &= \Delta_{00}^{ss,5} = \frac{2hn}{\pi(n^2 - q^2)} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{01}^{ss,2} &= \Delta_{01}^{ss,5} = -\Delta_{10}^{ss,2} = -\Delta_{10}^{ss,5} = -\frac{q\pi}{2} \text{ wenn } n = q, \\
\Delta_{11}^{ss,2} &= \Delta_{11}^{ss,5} = \frac{2nq^2\pi}{h(n^2 - q^2)} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{01}^{fc,1} &= \Delta_{01}^{fc,2} = -\Delta_{10}^{fc,2} = \Delta_{01}^{fc,3} = -\Delta_{10}^{fc,3} = \Delta_{01}^{fc,4} \\
&= -\Delta_{10}^{fc,4} = \Delta_{01}^{fc,5} = -\Delta_{10}^{fc,5} = \Delta_{01}^{fc,6} = -\Delta_{10}^{fc,6} \\
&= -\frac{32nq(-2 + n^2 + q^2)}{(-2 + n - q)(n - q)(2 + n - q)(-2 + n + q)(2 + n + q)(n + q)} \\
&\text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{00}^{fc,ss,2} &= -\Delta_{00}^{ss,fc,3} = \Delta_{00}^{fc,ss,5} = \begin{cases} \frac{h}{2} & \text{wenn } q = -1 + n \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{h}{2} & \text{wenn } q = 1 + n \end{cases}, \\
\Delta_{11}^{fc,ss,2} &= \begin{cases} \frac{(n-1)^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n - 1 \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{(n+1)^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n + 1 \end{cases}, \\
\Delta_{01}^{ss,3} &= \frac{2q^2}{n^2 - q^2} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{10}^{ss,3} &= \frac{2n^2}{q^2 - n^2} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{11}^{ss,fc,3} &= \begin{cases} -\frac{n^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n - 1 \text{ und } n \geq 2 \\ \frac{n^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n + 1 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^{ss,4} &= \Delta_{21}^{ss,6} = -\frac{2n^3q\pi^2}{h^2(n^2 - q^2)} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{22}^{ss,4} &= \frac{n^4\pi^4}{2h^3} \text{ wenn } n = q, \\
\Delta_{00}^{fc,1} &= \Delta_{00}^{fc,2} = \Delta_{00}^{fc,3} = \Delta_{00}^{fc,4} = \Delta_{00}^{fc,5} = \Delta_{00}^{fc,6} \\
&= \begin{cases} -\frac{h}{2} & \text{wenn } n = 2 + q \\ h & \text{wenn } n = q, q \neq 1 \\ -\frac{h}{2} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{3h}{2} & \text{wenn } n = q = 1 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^{fc,4} &= \Delta_{21}^{fc,5} = \Delta_{21}^{fc,6} \\
&= \frac{64\pi^2nq(-3+q^2+n^2(1+q^2))}{h^2(-2+n-q)(n-q)(2+n-q)(-2+n+q)(n+q)(2+n+q)} \text{ wenn } n + q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{22}^{fc,4} &= \begin{cases} -\frac{\pi^4(1+q)^4}{2h^3} & \text{wenn } n = q + 2 \\ \frac{\pi^4(1+6q^2+q^4)}{h^3} & \text{wenn } n = q \\ -\frac{\pi^4(-1+q)^4}{2h^3} & \text{wenn } n = q - 2 \text{ und } q \geq 3 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^{fc,ss,6} &= \begin{cases} -\frac{q^3\pi^3}{2h^2} & \text{wenn } q = n - 1 \text{ und } n \geq 2 \\ \frac{q^3\pi^3}{2h^2} & \text{wenn } q = n + 1 \end{cases}, \\
\Delta_{12}^{ss,fc,4} &= -\Delta_{21}^{ss,fc,4} = -\Delta_{21}^{ss,fc,5} = -\Delta_{21}^{ss,fc,6} \\
&= \begin{cases} \frac{n^3\pi^3}{2h^2} & \text{wenn } q = n - 1 \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{n^3\pi^3}{2h^2} & \text{wenn } q = n + 1 \end{cases}, \\
\Delta_{21}^{ss,5} &= \frac{n^3\pi^3}{2h^2} \text{ wenn } n = q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{22}^{ss,fc,4} &= -\frac{8n^5\pi^3q}{h^3(q^4 + (-1+n^2)^2 - 2q^2(1+n^2))} \text{ wenn } q+n = \text{gerade}, \\
\Delta_{20}^{ss,5} &= -\frac{2n^3\pi}{h(n^2-q^2)} \text{ wenn } n+q = \text{ungerade}, \\
\Delta_{11}^{fc,ss,5} &= -\Delta_{20}^{fc,ss,5} = \begin{cases} \frac{q^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n-1 \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{q^2\pi^2}{2h} & \text{wenn } q = n+1 \end{cases}, \\
\Delta_{01}^{fc,ss,6} &= -\Delta_{10}^{fc,ss,6} = \begin{cases} \frac{q\pi}{2} & \text{wenn } q = -1+n \text{ und } n \geq 2 \\ -\frac{q\pi}{2} & \text{wenn } q = 1+n \end{cases}, \\
Q_{00}^{ss} &= \begin{cases} \frac{1}{4}h^2 & \text{wenn } n = q \\ \frac{2h^2nq}{\pi^2(n^2-q^2)^2} [(-1)^{n+q} - 1] & \text{wenn } n \neq q \end{cases}, \\
Q_{00}^{ss,fc} &= \begin{cases} -\frac{h^2(n^2-n+1)}{4n\pi(n-1)} & \text{wenn } q = n-1 \\ -\frac{h^2(n^2+n+1)}{4n\pi(n+1)} & \text{wenn } q = n+1 \\ \frac{-4h^2nq(-1)^{n+q}}{\pi(q+n+1)(q+n-1)(q-n+1)(q-n-1)} & \text{sonst} \end{cases}, \\
Q_{00}^{fc} &= \begin{cases} \hat{Q} & \text{wenn } n+q = \text{ungerade} \\ \frac{-h^2}{4} & \text{wenn } n = q+2 \\ \frac{-h^2}{4} & \text{wenn } n = q-2 \text{ und } q \geq 3 \\ \frac{h^2}{2} & \text{wenn } n = q \text{ und } q \neq 1 \\ \frac{3h^2}{4} & \text{wenn } n = q = 1 \end{cases} \\
\text{mit } \hat{Q} &= \frac{h^2 \left( \left( \frac{-2}{(n-q)^2} \right) + \frac{1}{(2+n-q)^2} + \frac{1}{(2-n+q)^2} - \frac{1}{(-2+n+q)^2} + \left( \frac{2}{(n+q)^2} \right) - \frac{1}{(2+n+q)^2} \right)}{\pi^2}
\end{aligned}$$



## Anhang 9.E: Resultanten der Ansatzfunktionen für die Flansche

Mit den Ansatzfunktionen (9.4) und (9.5) der Flansche können die betreffenden Integralresultanten der Anhänge 9.A und 9.B bezüglich der Querrichtung  $y$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\Delta_{00}^{ss,3} &= \frac{b}{n+q-1}, \\
\Delta_{00}^{ss,2} &= \Delta_{00}^{ss,5} = \frac{b}{n+q}, \\
\Delta_{00}^{ss,1} &= \Delta_{00}^{fc,ss,2} = \Delta_{00}^{ss,fc,3} = \Delta_{00}^{ss,4} = \Delta_{00}^{fc,ss,5} = \Delta_{00}^{ss,6} \\
&= \frac{b}{n+q+1}, \\
\Delta_{00}^{ss,fc,1} &= \Delta_{00}^{ss,fc,2} = \Delta_{00}^{ss,fc,4} = \Delta_{00}^{ss,fc,5} = \Delta_{00}^{ss,fc,6} = \Delta_{00}^{fc,ss,6} \\
&= \frac{b}{n+q+2}, \\
\Delta_{00}^{fc,1} &= \Delta_{00}^{fc,2} = \Delta_{00}^{fc,3} = \Delta_{00}^{fc,4} = \Delta_{00}^{fc,5} = \Delta_{00}^{fc,6} = \frac{b}{n+q+3}, \\
\Delta_{10}^{ss,3} &= \frac{n-1}{n+q-2} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{10}^{ss,fc,3} &= \frac{n-1}{n+q}, \\
\Delta_{10}^{ss,2} &= \Delta_{10}^{ss,5} = \frac{n}{n+q-1}, \\
\Delta_{10}^{ss,4} &= \Delta_{10}^{ss,6} = \frac{n}{n+q}, \\
\Delta_{10}^{ss,fc,1} &= \Delta_{10}^{ss,fc,5} = \Delta_{10}^{ss,fc,6} = \frac{n}{n+q+1}, \\
\Delta_{10}^{fc,ss,2} &= \Delta_{10}^{fc,ss,5} = \frac{n+1}{n+q}, \\
\Delta_{10}^{ss,fc,2} &= \Delta_{10}^{ss,fc,4} = \Delta_{10}^{fc,ss,6} = \frac{n+1}{n+q+1}, \\
\Delta_{10}^{fc,2} &= \Delta_{10}^{fc,3} = \Delta_{10}^{fc,4} = \Delta_{10}^{fc,5} = \Delta_{10}^{fc,6} = \frac{n+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{01}^{ss,3} &= \frac{q-1}{n+q-2} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{01}^{ss,2} &= \Delta_{01}^{ss,5} = \frac{q-1}{n+q-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{01}^{fc,ss,2} &= \Delta_{01}^{fc,ss,5} = \frac{q-1}{n+q}, \\
\Delta_{01}^{ss,1} &= \Delta_{01}^{ss,4} = \Delta_{01}^{ss,6} = \frac{q}{n+q}, \\
\Delta_{01}^{fc,ss,6} &= \frac{q}{n+q+1}, \\
\Delta_{01}^{ss,fc,3} &= \frac{q+1}{n+q}, \\
\Delta_{01}^{ss,fc,1} &= \Delta_{01}^{ss,fc,2} = \Delta_{01}^{ss,fc,4} = \Delta_{01}^{ss,fc,5} = \Delta_{01}^{ss,fc,6} = \frac{q+1}{n+q+1}, \\
\Delta_{01}^{fc,1} &= \Delta_{01}^{fc,2} = \Delta_{01}^{fc,3} = \Delta_{01}^{fc,4} = \Delta_{01}^{fc,5} = \Delta_{01}^{fc,6} = \frac{q+1}{n+q+2}, \\
\Delta_{11}^{ss,3} &= \frac{(n-1)(q-1)}{b(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{11}^{ss,fc,3} &= \frac{(n-1)(q+1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{11}^{fc,ss,2} &= \Delta_{11}^{fc,ss,5} = \frac{(n+1)(q-1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{11}^{fc,1} &= \Delta_{11}^{fc,2} = \Delta_{11}^{fc,3} = \Delta_{11}^{fc,4} = \Delta_{11}^{fc,5} = \Delta_{11}^{fc,6} \\
&= \frac{(n+1)(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{20}^{ss,fc,4} &= \Delta_{20}^{ss,fc,5} = \Delta_{20}^{ss,fc,6} = \frac{n(n-1)}{b(n+q)}, \\
\Delta_{20}^{ss,6} &= \frac{n(n-1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{20}^{ss,5} &= \frac{n(n-1)}{b(n+q-2)} \text{ wenn } n+q > 2, \\
\Delta_{21}^{ss,5} &= \frac{n(n-1)(q-1)}{b^2(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{21}^{ss,fc,4} &= \Delta_{21}^{ss,fc,5} = \Delta_{21}^{ss,fc,6} = \frac{n(n-1)(q+1)}{b^2(n+q-1)}, \\
\Delta_{20}^{fc,ss,5} &= \frac{n(n+1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{20}^{fc,ss,6} &= \frac{n(n+1)}{b(n+q)}, \\
\Delta_{20}^{fc,5} &= \Delta_{20}^{fc,6} = \frac{n(n+1)}{b(n+q+1)}, \\
\Delta_{21}^{fc,ss,5} &= \frac{n(n+1)(q-1)}{b^2(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{21}^{fc,4} &= \Delta_{21}^{fc,5} = \Delta_{21}^{fc,6} = \frac{n(n+1)(q+1)}{b^2(n+q)}, \\
\Delta_{11}^{ss,2} &= \Delta_{11}^{ss,5} = \frac{n(q-1)}{b(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{11}^{ss,fc,1} &= \Delta_{11}^{ss,fc,2} = \Delta_{11}^{ss,fc,4} = \Delta_{11}^{ss,fc,5} = \Delta_{11}^{ss,fc,6} = \frac{n(q+1)}{b(n+q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^{ss,1} &= \Delta_{11}^{ss,4} = \Delta_{11}^{ss,6} = \frac{nq}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{21}^{ss,4} &= \Delta_{21}^{ss,6} = \frac{nq(n-1)}{b^2(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{21}^{fc,ss,6} &= \frac{nq(n+1)}{b^2(n+q-1)}, \\
\Delta_{12}^{ss,fc,4} &= \frac{nq(q+1)}{b^2(n+q-1)}, \\
\Delta_{22}^{ss,4} &= \frac{nq(n-1)(q-1)}{b^3(n+q-3)} \text{ wenn } n+q \neq 3, \\
\Delta_{22}^{ss,fc,4} &= \frac{nq(n-1)(q+1)}{b^3(n+q-2)} \text{ wenn } n+q \neq 2, \\
\Delta_{22}^{fc,4} &= \frac{nq(n+1)(q+1)}{b^3(n+q-1)}, \\
\Delta_{11}^{fc,ss,6} &= \frac{q(n+1)}{b(n+q)}, \\
\Delta_{02}^{ss,4} &= \frac{q(q-1)}{b(n+q-1)}, \\
\Delta_{02}^{ss,fc,4} &= \frac{q(q+1)}{b(n+q)}, \\
\Delta_{02}^{fc,4} &= \frac{q(q+1)}{b(n+q+1)}, \\
Q_{00}^{ss} &= \frac{b^2}{n+q+2}, \\
Q_{00}^{ss,fc} &= \frac{b^2}{n+q+3}, \\
Q_{00}^{fc} &= \frac{b^2}{n+q+4}.
\end{aligned}$$



# Anhang 9.F: Matrizen des Eigenwertproblems

Die Matrizen  $\underline{\underline{K}}_i$  und  $\underline{\underline{K}}_a$  des Eigenwertproblems können in Submatrizen unterteilt werden wie folgt:

$$\underline{\underline{K}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{i,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{i,w} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{i,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{i,f} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{K}}_a = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{a,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{a,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{a,w} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{a,f} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{a,f} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}.$$

Die hierin auftretenden Untermatrizen  $\underline{\underline{K}}_{i,f}$  und  $\underline{\underline{K}}_{i,w}$  bezüglich der Steifigkeiten der Flanche und des Stegs weisen dabei eine ähnliche Form auf wie folgt:

$$\underline{\underline{K}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{ss}}^{m^{ss}n^{ss}i^{fc}j^{fc}} \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,w^{fc}}^{m^{fc}n^{fc}i^{fc}j^{fc}} \\ \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{ss}}^{k^{ss}l^{ss}i^{fc}j^{fc}} \\ \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,x^{fc}}^{k^{fc}l^{fc}i^{fc}j^{fc}} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{ss}}^{i^{ss}j^{ss}i^{fc}j^{fc}} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}m^{ss}n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}m^{fc}n^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}k^{ss}l^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}k^{fc}l^{fc}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}i^{ss}j^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{i,y^{fc}}^{i^{fc}j^{fc}i^{fc}j^{fc}} \end{bmatrix}$$

Die hier auftauchenden Untermatrizen weisen dabei die folgenden Symmetrieeigenschaften auf:

$$\underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{m^\alpha n^\alpha m^\beta n^\beta} = \left( \underline{\underline{K}}_{i,w^\beta}^{m^\beta n^\beta m^\alpha n^\alpha} \right)^T,$$

$$\underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{m^\alpha n^\alpha k^\beta l^\beta} = \left( \underline{\underline{K}}_{i,x^\beta}^{k^\beta l^\beta m^\alpha n^\alpha} \right)^T,$$

$$\underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{m^\alpha n^\alpha i^\beta j^\beta} = \left( \underline{\underline{K}}_{i,y^\beta}^{i^\beta j^\beta m^\alpha n^\alpha} \right)^T,$$



$$\underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{i^\alpha j^\alpha i^\beta j^\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{1 j^\alpha 1 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{1 j^\alpha 2 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{1 j^\alpha 3 j^\beta} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{1 j^\alpha I^\beta l^\beta} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{2 j^\alpha 1 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{2 j^\alpha 2 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{2 j^\alpha 3 j^\beta} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{2 j^\alpha I^\beta j^\beta} \\ \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{3 j^\alpha 1 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{3 j^\alpha 2 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{3 j^\alpha 3 j^\beta} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{3 j^\alpha I^\beta j^\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{I^\alpha j^\alpha 1 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{I^\alpha j^\alpha 2 j^\beta} & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{I^\alpha j^\alpha 3 j^\beta} & \dots & \underline{\underline{K}}_{i,y^\alpha}^{I^\alpha j^\alpha I^\beta j^\beta} \end{bmatrix},$$

worin:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda n^\alpha \gamma n^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda n^\alpha \gamma n^\beta + \Gamma_i^\gamma n^\beta \lambda n^\alpha \right], \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda n^\alpha \gamma l^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda n^\alpha \gamma l^\beta + \Gamma_i^\gamma l^\beta \lambda n^\alpha \right], \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda n^\alpha \gamma j^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda n^\alpha \gamma n^\beta + \Gamma_i^\gamma j^\beta \lambda n^\alpha \right], \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda l^\alpha \gamma l^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda l^\alpha \gamma l^\beta + \Gamma_i^\gamma l^\beta \lambda l^\alpha \right], \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda l^\alpha \gamma j^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda l^\alpha \gamma j^\beta + \Gamma_i^\gamma j^\beta \lambda l^\alpha \right], \\ \underline{\underline{K}}_{i,w^\alpha}^{\lambda j^\alpha \gamma j^\beta} &= \left[ \Gamma_i^\lambda j^\alpha \gamma j^\beta + \Gamma_i^\gamma j^\beta \lambda j^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Die Größen  $n^\alpha$ ,  $l^\alpha$ ,  $j^\alpha$  bezeichnen dabei die Anzahl der Zeilen, wohingegen  $n^\beta$ ,  $l^\beta$ ,  $j^\beta$  die Anzahl der Spalten bedeutet.

Die geometrischen Steifigkeitsmatrizen  $\underline{\underline{K}}_{a,f}$  und  $\underline{\underline{K}}_{a,w}$  können ähnlich formuliert werden als:

$$\underline{\underline{K}}_a = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{a,w^{ss}}^{m^{ss} n^{ss} m^{ss} n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{a,w^{ss}}^{m^{ss} n^{ss} m^{fc} n^{fc}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{a,w^{fc}}^{m^{fc} n^{fc} m^{ss} n^{ss}} & \underline{\underline{K}}_{a,w^{fc}}^{m^{fc} n^{fc} m^{fc} n^{fc}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

wobei:

$$\underline{\underline{K}}_{a,w^\alpha}^{m^\alpha n^\alpha m^\beta n^\beta} = \left( \underline{\underline{K}}_{a,w^\beta}^{m^\beta n^\beta m^\alpha n^\alpha} \right)^T.$$

Für die Formulierung der Matrix  $\underline{\underline{K}}_c$  spezifizieren wir die Übergangsbedingungen ein wenig detaillierter. Hierbei kommen voraussetzungsgemäß nur diejenigen Ansatzfunktionen zum Tragen, die gelenkig gelagerte Steg- und Flanschlaminate beschreiben. Wir betrachten das Steglaminat, für das die entsprechende Reihenentwicklung für  $\psi_{y,w}^{ss}$  an der Stelle  $s_1 = 0$  mit der Abkürzung  $\Theta_{mn,w}^{x,s_1=0} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$  lautet wie folgt:

$$\psi_{y,w}^{ss}(x) = \sum_{m=1}^{m=I_w^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J_w^{ss}} Y_{mn,w}^{ss} \Theta_{mn,w}^{x,s_1=0}.$$

Die partiellen Ableitungen des Biegewinkels  $\psi_{y,w}^{ss}$  bezüglich  $Y_{mn,w}^{ss}$  lauten demnach:

$$\frac{\partial \psi_{y,w}^{ss}}{\partial Y_{mn,w}^{ss}} = \Theta_{mn,w}^{x,s_1=0}.$$

Zusammengefasst in einer Matrix bei Vorliegen von  $P - 1$  Stützstellen an den Stellen  $x_1 = \frac{a}{P}$ ,  $x_2 = \frac{2a}{P}, \dots, x_{P-1} = \frac{(P-1)a}{P}$  ergibt dies:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{mn,w}^{x,s_1=0} = \begin{bmatrix} \Theta_{11,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{11,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{11,w}^{x_{P-1},s_1=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{1n,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{1n,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{1n,w}^{x_{P-1},s_1=0} \\ \Theta_{21,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{21,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{21,w}^{x_{P-1},s_1=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{2n,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{2n,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{2n,w}^{x_{P-1},s_1=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{m1,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{m1,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{m1,w}^{x_{P-1},s_1=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{mn,w}^{x_1,s_1=0} & \Theta_{mn,w}^{x_2,s_1=0} & \dots & \Theta_{mn,w}^{x_{P-1},s_1=0} \end{bmatrix}.$$

Analog erhalten wir an der Stelle  $s_1 = h$ :

$$\underline{\underline{\Theta}}_{mn,w}^{x,s_1=h} = \begin{bmatrix} \Theta_{11,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{11,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{11,w}^{x_{P-1},s_1=h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{1n,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{1n,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{1n,w}^{x_{P-1},s_1=h} \\ \Theta_{21,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{21,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{21,w}^{x_{P-1},s_1=h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{2n,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{2n,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{2n,w}^{x_{P-1},s_1=h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{m1,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{m1,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{m1,w}^{x_{P-1},s_1=h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{mn,w}^{x_1,s_1=h} & \Theta_{mn,w}^{x_2,s_1=h} & \dots & \Theta_{mn,w}^{x_{P-1},s_1=h} \end{bmatrix},$$

wobei:

$$\Theta_{mn,w}^{x,s_1=h} = \begin{cases} -\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) & \text{wenn } n = \text{ungerade} \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) & \text{wenn } n = \text{gerade} \end{cases}.$$

Für jeden Flansch des gegenwärtig betrachteten doppelt-symmetrischen I-Trägers ergibt die Reihenentwicklung für den Biegewinkel  $\psi_{y,f}^{ss}$  an der Stelle  $s_i = 0$  (mit  $i = 2, 3, 4, 5$ ) mit  $\Theta_{mn,f}^{x,s_2=0} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$  für  $n = 1$ :

$$\psi_{y,f}^{ss}(x) = \sum_{m=1}^{m=I_f^{ss}} \sum_{n=1}^{n=I_f^{ss}} Y_{mn,f}^{ss} \Theta_{mn,f}^{x,s_i=0},$$

und damit:

$$\frac{\partial \psi_{y,w}^{ss}}{\partial Y_{mn,f}^{ss}} = \Theta_{mn,f}^{x,s_2=0}.$$

Assemblieren in einer Matrix-Schreibweise für  $P - 1$  Stützstellen ergibt:

$$\Theta_{mn,f}^{x,s_i=0} = \begin{bmatrix} \Theta_{11,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{11,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{11,f}^{x_{P-1},s_i=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{1n,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{1n,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{1n,f}^{x_{P-1},s_i=0} \\ \Theta_{21,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{21,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{21,f}^{x_{P-1},s_i=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{2n,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{2n,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{2n,f}^{x_{P-1},s_i=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{m1,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{m1,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{m1,f}^{x_{P-1},s_i=0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_{mn,f}^{x_1,s_i=0} & \Theta_{mn,f}^{x_2,s_i=0} & \cdots & \Theta_{mn,f}^{x_{P-1},s_i=0} \end{bmatrix}.$$

Die zusätzlichen Terme infolge der Übergangsbedingungen können in einer Matrix-Schreibweise weiter assembliert werden zu:

$$\Theta_{w}^{s_1=0} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \Theta_{mn,w}^{x,s_1=0} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{w}^{s_1=h} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \Theta_{mn,w}^{x,s_1=h} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_f^{s_i=0} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \Theta_{mn,f}^{x,s_i=0} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

wobei gilt:

$$\Theta_{f,c}^{s_2=0} = \Theta_{f,c}^{s_3=0} = -\Theta_{f,c}^{s_4=0} = -\Theta_{f,c}^{s_5=0}.$$

Nachdem nun die zusätzlichen Terme als Folge der Übergangsbedingungen klar identifiziert wurden, kann dazu übergegangen werden, diese Bedingungen für unsere Zwecke vollständig auszuformulieren. Für den Steg-Flansch-Übergang an der Stelle  $s_1 = 0$  und  $s_2 = 0$  ergibt die Übergangsbedingung  $\psi_y^1(s_1 = 0) = \psi_y^2(s_2 = 0)$ :

$$\sum_{m=1}^{m=I_w^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J_w^{ss}} Y_{mn,w}^{ss} \Theta_{mn,w}^{x,s_1=0} - \sum_{m=1}^{m=I_f^{ss}} \sum_{n=1}^{n=J_f^{ss}} Y_{mn,f}^{ss} \Theta_{mn,f}^{x,s_2=0} = 0,$$

was sich zusammenfassend darstellen lässt als:

$$\underline{\underline{\Theta}}^1 = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\Theta}}_{f,c}^{s_2=0} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=0} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}.$$

Genauso führen die weiteren Übergangsbedingungen  $\psi_y^1(s_1 = 0) = \psi_y^3(s_3 = 0)$ ,  $\psi_y^1(s_1 = h) = -\psi_y^1(s_1 = 0)$ ,  $\psi_y^1(s_1 = h) = \psi_y^4(s_4 = 0)$  und  $\psi_y^1(s_1 = h) = \psi_y^1(s_5 = 0)$  auf die folgenden Teilmatrizen:

$$\underline{\underline{\Theta}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{\Theta}}_{f,c}^{s_3=0} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=0} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\Theta}}^3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=h} + \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=0} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\Theta}}^4 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=h} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{f,c}^{s_4=0} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\Theta}}^5 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{w,c}^{s_1=h} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Theta}}_{f,c}^{s_5=0} \end{bmatrix}.$$

Diese werden in einer Matrix zusammengefasst wie folgt:

$$\underline{\underline{\Theta}} = [ \underline{\underline{\Theta}}^1 \quad \underline{\underline{\Theta}}^2 \quad \underline{\underline{\Theta}}^3 \quad \underline{\underline{\Theta}}^4 \quad \underline{\underline{\Theta}}^5 ] .$$

---

Die Matrix  $\underline{\underline{K}}$  ist damit darstellbar als:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\Theta}} \\ \underline{\underline{\Theta}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}.$$

